TD 02 – Machines de Turing et codage

Exercice 1. *MT peu utiles...*

Pour l'alphabet d'entrée $\Sigma = \{a, b\}$, donner des machines de Turing ayant chacun des comportements suivants.

1. Une machine de Turing qui ne s'arrête sur aucune entrée.
2. Une machine de Turing qui s'arrête uniquement sur l'entrée $abba$.

Exercice 2. *Espace et temps*

Supposons qu'une machine de Turing s'arrête au bout de t étapes de calcul en visitant (possiblement plusieurs fois chacune) s cases du ruban. On a évidement $s \leq t$ car au plus une nouvelle case est visitée par étape de temps, mais peut-on borner supérieurement t par une fonction de s ?

Exercice 3. *MT*

Donner des machines de Turing pour <u>décider</u> les langages suivants.

1. $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.
2. $L = \{uav \mid u, v \in \{a, b\}^*$ et $|u| = |v|\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 4. *Codage*

On définit une fonction de codage *code*$_1$ des couples d'entiers de la manière suivante : étant donnés deux entiers x et y, on pose

$$\mathit{code}_1(x, y) = x_1 0 x_2 0 \ldots x_{n-1} 0 x_n \, 1 \, y_1 y_2 \ldots y_m,$$

où $x_1 x_2 \ldots x_n$ et $y_1 y_2 \ldots y_m$ sont les représentations binaires respectives de x et y.

1. Ce codage est-il injectif ? (Autrement dit, un tel code correspond-il bien à un unique couple d'entiers ?)
2. Donnez le codage du couple $(10, 5)$.
3. Quel est le couple associé au codage 1000101000101110011110 ?
4. Quel est le nombre de bits utilisés pour coder un couple (x, y) ?

On définit un nouveau codage *code*$_2$ en posant maintenant

$$\mathit{code}_2(x, y) = t_1 0 t_2 0 \ldots t_{\ell-1} 0 t_\ell \, 1 \, x_1 x_2 \ldots x_n \, y_1 y_2 \ldots y_m,$$

où $x_1 x_2 \ldots x_n$ et $y_1 y_2 \ldots y_m$ sont les représentations binaires respectives de x et y, et où $t_1 t_2 \ldots t_\ell$ est la représentation binaire de l'entier n (qui est lui-même la taille de la représentation binaire de x).

5. Ce codage est-il injectif ?
6. Donnez le codage du couple $(10, 5)$.
7. Quel est le couple (x, y) associé au codage 100011100011001 ?
8. Quel est le nombre de bits utilisés pour coder un couple (x, y) ?

On souhaite généraliser ce codage aux tuples d'entiers $(x^1, \ldots, x^k)$ pour k quelconque.

9. Proposez un tel codage.
10. Donnez le codage du tuple $(6, 11, 10, 3)$.

11. Donnez le nombre de bits utilisés pour coder un tuple arbitraire $(x^1, \ldots, x^k)$.

Exercice 5. *MT : conventions*

Objectif : voir que l'on peut utiliser d'autres conventions.

1. Peut-on décider exactement les mêmes langages si la tête de lecture est initialement placée sur la case la plus à droite du mot d'entrée ? (Justifier)
2. Peut-on décider exactement les mêmes langages si l'on autorise des transitions pour lesquelles la tête de lecture/écriture ne bouge pas (ni L ni R) ? (Justifier)
3. Peut-on décider exactement les mêmes langages si l'on ajoute la restriction $\Sigma = \{0, 1\}$? Et si en plus $\Gamma = \{0, 1, B\}$? (Justifier)

Exercice 6. *Encore des MT*

Donner des machines de Turing pour <u>décider</u> les langages suivants.

1. $L = \{w\#w' \mid w, w' \in \{0,1\}^* \text{ et } w' = w + 1\}$ avec $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, c'est-à-dire w' est un nombre binaire égal à l'incrémentation du nombre binaire représenté par w.
2. $L = \{a^n b^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 7. *MT et pseudo-code*

Soit le pseudo-code suivant.

```
h(x : tableau de bits de taille n)
  i <- n
  tant que ( x[i] == 1 et i >= 1 ) faire
    i <- i-1
  fin tant que
  si i == 0 alors
    accepter
  sinon
    rejeter
  fin si
```

1. Quel est le langage reconnu/accepté par l'algorithme h ?
2. Donner une machine de Turing qui décide le même langage que h, et qui s'arrête toujours.
3. Donner une machine de Turing qui calcule la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Donner une machine de Turing qui calcule la fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $g(n) = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Sauriez-vous construire une machine de Turing pour convertir un entier codé en binaire en un entier de même valeur codé en unaire ?