
Examen – Calculabilité (SIN6U05L)

Durée : 2 heures*(Barème indicatif)***Documents :** non autorisés**Exercice 1.***Définitions (5 points)*

1. Quelles sont les deux façons dont une machine de Turing M peut **rejeter** un mot w ?
2. Qu'est-ce qu'un langage **non semi-décidable** ?
3. Est-ce que tout langage **non semi-décidable** est également **non décidable** ? Justifier.
4. Réordonner les symboles suivants afin d'énoncer correctement le **théorème de l'arrêt** :
 $\forall w, \nexists M_2, \forall M_1 : M_1(w, \langle M_1 \rangle) = \text{halt}(\langle M_1 \rangle, w)$.
5. Donner un exemple de **propriété non triviale**, en justifiant. Compléter la phrase suivante sur ce que l'on peut alors conclure en appliquant le théorème de Rice :
 « Il n'existe pas de machine de Turing prenant en entrée et décidant si »

Exercice 2.*Machine de Turing (6 points)*

Soit le langage $L_2 \subseteq \{a, b\}^*$ contenant les mots de longueur multiple de trois et dont les deux premières lettres sont identiques aux deux dernières :

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w_1 w_2 \dots w_k \text{ avec } (k \equiv 0 \pmod{3}) \text{ et } (w_1 = w_{k-1}) \text{ et } (w_2 = w_k)\}.$$

1. Donner deux mots de $\{a, b\}^*$ appartenant à L_2 .
2. Donner deux mots de $\{a, b\}^*$ n'appartenant pas à L_2 .
3. Donner l'automate d'une machine de Turing qui **décide** le langage L_2 .
4. Donner l'exécution de votre machine sur l'entrée bbb (donc en partant de $q_0 bbb \vdash \dots$).

Exercice 3.*Réduction simple (3 points)*

Rappel : $L_{\bar{u}} = \{\langle M \rangle, w \mid w \notin L(M)\}$. Soit $L_3 = \{\langle M \rangle, ww \mid w \notin L(M)\}$.

1. Montrer que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L_3$.
2. Est-ce que $L_{\bar{u}}$ est décidable ? semi-décidable ?
3. Que peut-on déduire sur L_3 à partir des réponses précédentes ?

Exercice 4.*Réduction (6 points)*

Rappel : $L_{\text{halt}\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon) \downarrow\}$ contient le code des machines de Turing dont l'exécution, partant de l'entrée vide, s'arrête. Soit $L_4 = \{\langle M \rangle \mid \exists w : M(w) \downarrow\}$.

1. Montrer que $L_{\text{halt}\epsilon} \leq_m^T L_4$.
2. Est-ce que $L_{\text{halt}\epsilon}$ est décidable ? semi-décidable ?
3. Que peut-on déduire sur L_4 à partir des réponses précédentes ?

Exercice 5.*Bonus (6 points)*

Pour cet exercice bonus, toute réponse imprécise ne vous rapportera aucun point.

1. Donner un semi-algorithme (en français ou en pseudo code) pour semi-décider L_4 .
2. Montrer que $L_4 \leq_m^T L_{\text{halt}\epsilon}$.