
Examen session 1 – Calculabilité (SIN6U05L)

Durée : 2 heures

(Barème indicatif)

Documents : non autorisés**Exercice 1.**

Définitions (5 points)

1. Quelles sont les deux façons dont une machine de Turing M peut **rejeter** un mot w ?
2. Qu'est-ce qu'un langage **non décidable** ?
3. Dans la définition d'une machine de Turing, le symbole **blanc** B doit vérifier $B \in \Gamma \setminus \Sigma$. Pourquoi doit-il être dans l'ensemble $\Gamma \setminus \Sigma$?
4. Réordonner les symboles suivants afin d'énoncer correctement le **théorème de l'arrêt** :
 $\forall w, \nexists M_2, \forall M_1 : M_1(w, \langle M_1 \rangle) = \text{halt}(\langle M_1 \rangle, w)$.
5. Donner un exemple de **propriété non triviale**, en justifiant. Compléter la phrase suivante sur ce que l'on peut alors conclure en appliquant le théorème de Rice :
 « Il n'existe pas de machine de Turing prenant en entrée et décidant si »

Exercice 2.

Machine de Turing (6 points)

Soit le langage L_2 sur l'alphabet $\{a, b\}$ contenant les mots de longueur impaire et avec un a en position centrale : $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w_1 w_2 \dots w_k \text{ avec } (k \equiv 1 \pmod{2}) \text{ et } (w_{\frac{k+1}{2}} = a)\}$.

1. Donner deux mots de $\{a, b\}^*$ appartenant à L_2 .
2. Donner deux mots de $\{a, b\}^*$ n'appartenant pas à L_2 .
3. Donner l'automate d'une machine de Turing qui **décide** le langage L_2 .
4. Donner l'exécution de votre machine sur l'entrée aaa (donc en partant de $q_0aaa \vdash \dots$).

Exercice 3.

Réduction très très simple (3 points)

Rappel : $L_{\bar{u}} = \{\langle M \rangle \# w \mid w \notin L(M)\}$. Soit $L_3 = \{\langle M \rangle \# ww \mid w \notin L(M)\}$.

1. Montrer que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L_3$.
2. Est-ce que $L_{\bar{u}}$ est décidable? semi-décidable?
3. Que peut-on déduire sur L_3 à partir des réponses précédentes?

Exercice 4.

Réduction (6 points)

Rappel : $L_{\text{halt}\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon) \downarrow\}$ contient le code des machines de Turing dont l'exécution, partant de l'entrée vide, s'arrête. Soit $L_4 = \{\langle M \rangle \mid \exists w : M(w) \downarrow\}$.

1. Montrer que $L_{\text{halt}\epsilon} \leq_m^T L_4$.
2. Est-ce que $L_{\text{halt}\epsilon}$ est décidable? semi-décidable?
3. Que peut-on déduire sur L_4 à partir des réponses précédentes?

Exercice 5.

Bonus (6 points)

Pour cet exercice bonus, toute réponse imprécise ne vous rapportera aucun point.

1. Donner un semi-algorithme (en français ou en pseudo code) pour semi-décider L_4 .
2. Montrer que $L_4 \leq_m^T L_{\text{halt}\epsilon}$.