
Calculabilité avancée (SINBU06) – Examen – Session 2

Durée : 1 heure

(Barème indicatif)

Documents : autorisés

Exercice 1.

(3 points)

1. Qu'est ce que la thèse de Church-Turing ?
2. Expliquer en quelques phrases l'analogie entre une machine de Turing universelle et un interpréteur de langage de programmation comme `bash` ou `python`.

Exercice 2.

(10 points)

Rappel : le langage $L_u = \{\langle M \rangle \# w \mid w \in L(M)\}$ n'est pas décidable.

1. Étant donné un mot w , on définit le langage $L_w = \{\langle M \rangle \mid w \in L(M)\}$.
Montrer que pour tout mot w , on a $L_u \leq_m^T L_w$.
(Indication : vous pouvez commencer avec $w = ab$, $w = baa$, puis généraliser.)

Important : Exercice 3 ou (exclusif) 4 au choix,
vous ne pouvez répondre qu'à un seul des deux

Exercice 3.

(7 points)

Revoici la définition du problème de la mort pour l'automate cellulaire du jeu de la vie.

Problème de la mort pour le jeu de la vie (Death)

Entrée : une configuration finie.

Question : est-ce que toutes les cellules vont mourir ?

1. Qu'est-ce qu'une configuration *finie* du jeu de la vie ?
2. Donner un exemple d'instance positive du problème **Death**.
3. Donner un exemple d'instance négative du problème **Death**.
4. Expliquer brièvement pourquoi le problème **Death** est semi-décidable.
5. Donner l'idée d'une démonstration que le problème **Death** est indécidable, par réduction many-one Turing depuis $L_{halt\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ s'arrête quand on la lance sur l'entrée vide}\}$.
(Indication : vous pouvez passer la plupart des détails techniques, mais il faut présenter avec clarté la structure et les raisonnements de votre démonstration.)

Exercice 4.

(7 points)

Rappel : le langage $L_{halt\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon) \downarrow\}$ n'est pas décidable, $M(w) \downarrow$ signifie que M s'arrête quand on la lance sur l'entrée w , et ϵ désigne le mot vide.

1. Montrer que $L \leq_m^T L_{halt\epsilon}$ avec $L = \{\langle M \rangle \mid \exists w : M(w) \downarrow\}$.