TD 01 – Cardinalité et machines de Turing

Rappel : soient A et B deux ensembles, une fonction $f : A \to B$ est
- injective ssi $\forall\, a, a' \in A : f(a) = f(a') \implies a = a'$ (ou la contraposée),
- surjective ssi $\forall\, b \in B : \exists\, a \in A : b = f(a)$,
- bijective ssi elle est à la fois injective et surjective.

Utile : Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein : soient A et B deux ensembles, si il existe une fonction injective de A vers B (intuitivement $|A| \leq |B|$), et une fonction injective de B vers A (intuitivement $|B| \leq |A|$), alors il existe une bijection entre A et B (intuitivement $|A| = |B|$).

Exercice 1. *Ensembles infinis dénombrables*

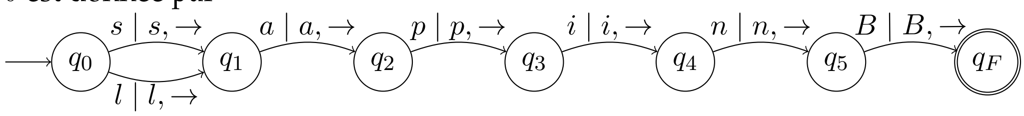
1. Donner cinq éléments de l'ensemble $\mathbb{N} \times \{0, 1, a\}$.
2. Donner une bijection entre $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ et $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, \ldots\}$.
3. Donner une bijection entre $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ et $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
4. Donner une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
5. Peut-on en déduire que $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$?
6. Donner une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
7. Donner une bijection entre Σ^* et $\mathbb{N}$, pour Σ un alphabet fini.

Exercice 2. *Ensembles infinis indénombrables*

1. Donner une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$) et $[0, 1]$.
2. Donner une bijection entre l'ensemble des langages sur un alphabet fini Σ, et $[0, 1]$.
3. Donner une bijection entre $[0, 1]$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Ma première MT*

Soit $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, q_F)$ la machine de Turing où
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_F\}$,
- $\Sigma = \{a, i, l, n, p, s\}$, $\Gamma = \{a, i, l, n, p, s, B\}$,
- δ est donnée par



1. Quel est le langage reconnu par cette machine de Turing ?
2. Peut-on dire que ce langage est semi-décidable ?
3. Peut-on dire que ce langage est décidable ?

Exercice 4. *états d'une MT = mémoire finie*

Objectif : voir que l'on peut sauvegarder des informations (en quantité finie) dans les états.
Soit $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, q_F)$ la machine de Turing où

— $Q = \{q_0, q_a, q_b, q'_a, q'_b, q_F\}$,
— $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, B\}$,
— δ est donnée par

$(q_0, a) \mapsto (q_a, a, \rightarrow)$	$(q_0, b) \mapsto (q_b, b, \rightarrow)$
$(q_a, a) \mapsto (q_a, a, \rightarrow)$	$(q_b, a) \mapsto (q_b, a, \rightarrow)$
$(q_a, b) \mapsto (q_a, b, \rightarrow)$	$(q_b, b) \mapsto (q_b, b, \rightarrow)$
$(q_a, B) \mapsto (q'_a, B, \leftarrow)$	$(q_b, B) \mapsto (q'_b, B, \leftarrow)$
$(q'_a, a) \mapsto (q_F, a, \rightarrow)$	$(q'_b, b) \mapsto (q_F, b, \rightarrow)$

1. Dessiner cette machine sous la forme d'un automate.

2. Quel est le langage reconnu par cette machine de Turing ?

3. Peut-on dire que ce langage est semi-décidable ?

4. Peut-on dire que ce langage est décidable ?

Exercice 5. *MT*

Donner des machines de Turing pour décider les langages suivants.

1. $L = \{aw \mid w \in \Sigma^*\}$ avec $\Sigma = \{a, b, c\}$.

2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 0 \mod 3\}$ avec $\Sigma = \{a\}$.

3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ est un palindrome}\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.

4. $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $\Sigma = \{a, b, c\}$.

5. $L = \{a^n b^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.

6. $L = \{w\#w' \mid w, w' \in \{0, 1\}^* \text{ et } w' = w + 1\}$ avec $\Sigma = \{0, 1, \#\}$.