
TD 05 – The complexity cake

Exercice 1.*Tranches de cake***Rappel :** un diagramme de Venn montre les relations (d'inclusion) entre ensembles.**Rappel :** une classe de complexité (en temps) est un ensemble de langages, défini à partir d'un ensemble d'algorithmes (ceux dont le temps d'exécution respecte une borne donnée).

1. Dessiner en justifiant le diagramme de Venn des classes suivantes : P, EXP, NP, NEXP.

Rappel : pour une classe de complexité \mathcal{C} , on définit $co\mathcal{C} = \{^cA \mid A \in \mathcal{C}\}$, avec cA le langage complémentaire de A .

2. Ajouter en justifiant les classes suivantes : coP , $coNP$, $coEXP$, $coNEXP$.
3. Citer deux inclusions connues pour être strictes.
4. Quelle est la question à 1 000 000 \$? (de la part du *Clay Mathematics Institute*)
5. Citer une autre question dont la réponse, si elle est négative, donne droit aux 1 000 000 \$.

Exercice 2.*Ranger sa chambre*

Pour chacun des problèmes suivants, donner la (plus petite) classe (possible) à laquelle il appartient, en justifiant.

Rappel : pour justifier que le langage associé à un problème appartient à une classe, on donne un *algorithme* dans cette classe, qui le *décide*.**SAT**

1. *entrée :* une formule propositionnelle ϕ
question : est-ce que $mod(\phi) \neq \emptyset$?

2-SAT

2. *entrée :* une formule propositionnelle ϕ dont les clauses sont de taille exactement 2
question : est-ce que $mod(\phi) \neq \emptyset$?

3. $L_{2SAT+} = L_{2SAT} \cup \{a01bb, t11wu\}$.

Clique

4. *entrée :* un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier k
question : G contient-il une clique¹ de taille k ?

Accessibilité

5. *entrée :* un graphe orienté G et deux sommets s et t
question : existe-t-il un chemin de s à t dans G ?

Set packing

6. *entrée :* une famille $\{S_j\}_{j \in \{1, \dots, m\}}$ d'ensembles tels que $S_j \subseteq \{1, \dots, n\}$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, et un entier $\ell \in \mathbb{N}$
question : $\{S_j\}$ contient-il ℓ ensembles mutuellement disjoints ?

Node cover

7. *entrée :* un graphe $G = (V, E)$ et un entier ℓ
question : existe-t-il un sous ensemble $V' \subseteq V$ tel que $|V'| \leq \ell$ et toute arête de E a l'une de ses extrémités dans V' ?

Directed Hamiltonian circuit

8. *entrée* : un graphe orienté $G = (V, A)$
question : existe-t-il un circuit dans G qui inclue chaque sommet exactement une fois?

Clique cover

9. *entrée* : un graphe G et un entier $\ell \in \mathbb{N}$
question : existe-t-il un ensemble d'au plus ℓ cliques dans G tel que V est l'union de ces cliques?

10. *Problem Parameters* : A set of tiles $T = t_1, \dots, t_m$. A set of horizontal constraints $H \subseteq T \times T$ such that if t_i is placed to the left of t_j , then it must be the case that $(t_i, t_j) \in H$. A set of vertical constraints $V \subseteq T \times T$ such that if t_i is placed below t_j , then it must be the case that $(t_i, t_j) \in V$. A designated tile t_1 that must be placed in the four corners of the grid.

Square domino

entrée : integer N , specified in binary.

question : determine whether there is a valid tiling of an $N \times N$ grid.

Ensemble indépendant

11. *entrée* : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier k
question : G contient-il un ensemble indépendant² de taille k ?