TD 04 – Classes P et NP

Exercice 1. *Temps déterministe*

Rappel des définitions :

$$\mathsf{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} DTIME(n^k),$$

$$\mathsf{EXP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} DTIME(2^{n^k}).$$

1. Au précédent TD nous avons donné une machine M_{pal} pour le problème du **Palindrome** qui fonctionne en temps n^3+2 sur l'alphabet $\Gamma = \{a, b, k, y, B\}$. Expliquer quelle est l'idée du théorème d'accélération linéaire pour résoudre en temps $(1+\frac{1}{1000})n + \frac{1}{1000}(n^3+2)$ le problème du **Palindrome**.
2. Donner deux classes de complexité en temps déterministe qui sont séparées par le théorème de hiérarchie.
3. Montrer que le problème **2-SAT** est dans la classe P.
4. Montrer que le problème $L_{2SAT+} = L_{2SAT} \cup \{a01bb, t11wu\}$ est dans P, sans utiliser le lemme de clôture de P par changements finis (on supposera que $0, 1, a, b, t, w, u \in \Sigma$). C'est-à-dire, donner un algorithme polynomial pour ce problème (a priori on devrait utiliser le même argument que pour la preuve générale, mais sur un exemple).
5. Montrer que le problème **Clique** est dans la classe EXP.
6. Montrer que le problème suivant est dans P. **Accessibilité** ; entrée : un graphe orienté G et deux sommets s et t ; question : existe-t-il un chemin de s à t dans G ?

Exercice 2. *Temps non-déterminisite*

Rappel des définitions :

$$\mathsf{NP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} NTIME(n^k),$$

$$\mathsf{NEXP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} NTIME(2^{n^k}).$$

1. Montrer que le problème **Clique** est dans la classe NP.
2. Montrer que le problème **Set packing** ; entrée : une famille $\{S_j\}_{j \in \{1,\ldots,m\}}$ d'ensembles tels que $S_j \subseteq \{1, \ldots, n\}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, et un entier $\ell \in \mathbb{N}$; question : $\{S_j\}$ contient-il ℓ ensembles mutuellement disjoints ? est dans la classe NP.
3. Montrer que le problème **Node cover** ; entrée : un graphe $G = (V, E)$ et un entier ℓ ; question : existe-t-il un sous ensemble $V' \subseteq V$ tel que $|V'| \leq \ell$ et toute arête de E a l'une de ses extrémités dans V' ? est dans la classe NP.
4. Montrer que le problème **Directed Hamiltonian circuit** ; entrée : un graphe orienté $G = (V, A)$; question : existe-t-il un circuit dans G qui inclue chaque sommet exactement une fois ? est dans la classe NP.

5. Montrer que le problème **Clique cover** ; entrée : un graphe G et un entier $\ell \in \mathbb{N}$; question : existe-t-il un ensemble d'au plus ℓ cliques dans G tel que V est l'union de ces cliques ? est dans la classe NP.

6. Montrer que le problème **Clique** est dans la classe NEXP.

7. Show that the **Square domino** problem is in the complexity class NEXP. *Problem Parameters* : A set of tiles $T = t_1, \dots, t_m$. A set of horizontal constraints $H \subseteq T \times T$ such that if t_i is placed to the left of t_j, then it must be the case that $(t_i, t_j) \in H$. A set of vertical constraints $V \subseteq T \times T$ such that if t_i is placed below t_j, then it must be the case that $(t_i, t_j) \in V$. A designated tile t_1 that must be placed in the four corners of the grid. *Problem Input* : Integer N, specified in binary. *Output* : Determine whether there is a valid tiling of an $N \times N$ grid.