TD 01 – Rappels

Exercice 1. *Bijections*

Soient A et B deux ensembles, une fonction $f : A \to B$ est

— injective ssi $\forall\, a, a' \in A : f(a) = f(a') \implies a = a'$ (ou la contraposee),

— surjective ssi $\forall\, b \in B : \exists\, a \in A : b = f(a)$,

— bijective ssi elle est à la fois injective et surjective.

1. Donner cinq éléments de l'ensemble $\mathbb{N} \times \{0, 1, a\}$.
2. Donner une bijection de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ dans $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, \ldots\}$.
3. Donner une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
4. Donner une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
5. Donner une bijection de Σ^* dans $\mathbb{N}$.

Exercice 2. *Propriétés de clôture*

Donner un exemple puis démontrer chacun des résultats suivants.

1. la famille des langages récursifs est close par complémentation ;
2. les familles des langages récursifs et r.e. sont closes par union et intersection ;
3. Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est récursif si et seulement si L et $\Sigma^* \setminus L$ sont r.e.

Exercice 3. *Robustesse du modèle des MT*

Les machines de Turing sont un modèle robuste, dans le sens où les détails de leur définition importent peu : on a toujours le même ensemble de langages/fonctions calculables.

1. Proposer un changement dans la définition des machines de Turing, et montrer que le modèle obtenu est équivalent.

Exercice 4. *L'arrêt*

Indiquer si chacune des phrases qui suivent est vraie ou fausse, en justifiant.

1. $\nexists M_{halt} : \forall \langle M \rangle, w : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$.
2. $\forall \langle M \rangle, w : \nexists M_{halt} : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$.

Exercice 5. *Réductions Turing many-one*

Ecrire chacune des réductions (Turing **many-one**) suivantes, et indiquer ce que l'on peut en déduire quant à la calculablité/récursivité des fonctions/langages.

1. Réduire L à $aL = \{aw \mid w \in L\}$ pour tout langage L.
2. Réduire $L_u = \{\langle M \rangle \# w \mid M \text{ accepte le mot } w\}$
   à $A = \{\langle M \rangle \mid M \text{ s'arrête quand on la lance sur l'entrée vide}\}$.
3. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f : (\langle M \rangle, w) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } M(bw) \uparrow \\ 1 \text{ sinon} \end{array} \right.$.

4. Réduire L_u à $B = \{\langle M\rangle \mid a \in L(M)\}$.
5. Réduire $L_{stupide} = \{a\}$ à L_u.
6. Réduire L_u à $C = \{\langle M\rangle \mid M$ s'arrête si on la lance sur l'entrée $abba\}$.
7. Réduire B à $D \times E$ avec $D = \{\langle M\rangle \mid b \in L(M)\}$ et $E = \{\langle M\rangle \mid a \in L(M)$ ou $b \in L(M)\}$.
8. Réduire L_u à $F = \{\langle M\rangle \mid M(w) \uparrow$ pour tout $w\}$.

Exercice 6. *Théorème de Rice*

Utiliser le théorème de Rice pour étudier la récursivité des propriétés suviantes.

1. $\{L \mid L = a^*\}$.
2. $\{L \mid aa \in L$, et $\forall k \neq 2 : a^k \notin L\}$.
3. $\{L \mid ab \notin L$, ou $\exists k : ab^k \in L\}$.
4. $\{\{\langle M\rangle \mid M$ accepte $\langle M\rangle\}\}$.
5. Plus généralement, que diriez-vous, pour un langage $L_{\text{objectif}} \subseteq \Sigma^*$ que l'on souhaite reconnaître, de la propriété $\{L_{\text{objectif}}\}$?

Exercice 7. *Universalité et complétude*

1. Comment démontrer l'existence des machines de Turing universelles ?
2. Donner un exemple de machine de Turing universelle.
3. Donner un exemple de modèle de calcul Turing-complet (autre que les MT...).
4. Donner un exemple de modèle de calcul plus faible que les machines de Turing.
5. En quelques mots intuitifs, qu'est-ce qu'un modèle de calcul ?

Exercice 8. *Thèse de Church-Turing*

Questions à choix multiples.

1. La thèse de Church-Turing est :
   (a) un théorème
   (b) une conjecture
   qui énonce que tout modèle de calcul raisonnable est équivalent aux machines de Turing.
2. L'adjectif *raisonnable* dans la phrase ci-dessus signifie :
   (a) que l'on peut définir par des manipulations de symboles mathématiques.
   (b) qui repose sur des lois physiques en accord avec notre expérience.
   (c) que l'on a déjà défini dans le passé.