# Examen session 1 – Calculabilité avancée

**2 heures**, **documents non-autorisés.**
Ce sujet comporte **2 pages** et **6 exercices**.
Le barème est donné à titre indicatif.

**Exercice 1.** *Notions de cours (2 points)*

1. Donner un exemple de langage non récursivement énumérable, différent† de $L_{\bar{u}}$.
   †Car cette réponse est donnée dans le rappel de l'Exercice 2. Tout langage différent de $L_{\bar{u}}$ convient.
2. Donner si possible un exemple de langage non récursivement énumérable mais récursif.
3. Donner si possible un exemple de langage non récursif mais récursivement énumérable.

**Exercice 2.** *Réduction many-one Turing (7 points)*

Rappel : $L_{\bar{u}} = \{\langle M \rangle \# w \mid M \text{ n'accepte pas } w\}$ n'est pas récursivement énumérable.

1. Donner sans justifier la transformation qui montre que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L_\uparrow$, avec
$$L_\uparrow = \{\langle M \rangle \# w \mid M(w) \uparrow\}$$
(rappel : $M(w) \uparrow$ signifie que $M$ ne s'arrête pas quand on la lance sur l'entrée $w$).
2. Montrer que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L_\oplus$, avec
$$L_\oplus = \{\langle M \rangle \# w \# w' \mid (M(w) \uparrow) \oplus (M(w') \uparrow)\}$$
(rappel : $\oplus$ désigne le *ou exclusif*, soit l'un soit l'autre mais pas les deux).
3. Pourquoi peut-on en déduire que $L_\uparrow$ et $L_\oplus$ ne sont pas récursifs ?

**Exercice 3.** *Théorème de Rice (4 points)*

1. Qu'est-ce qu'une propriété *non triviale* ?
2. Donner un exemple de propriété *triviale*.
3. Que dire de cette propriété (celle de votre réponse à la question 2) ? Est-elle intéressante ?
4. Donner un exemple de propriété *non triviale*.
5. Que dit le théorème de Rice de cette propriété (celle de votre réponse à la question 4) ? Répondre en complétant la phrase suivante : « Il n'existe pas de machine de Turing qui prenne en entrée. . . »

**Exercice 4.** *Calculabilité des nombres réels (6 points)*

(Justifier vos réponses)

Un nombre réel est *calculable* si et seulement si il existe une machine de Turing (déterministe) qui énumère ses digits (en base 2 pour simplifier). Par exemple $\frac{1}{3}$, $\pi$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sont calculables.

**1.** Donner la partie entière et les trois premiers bits après la virgule de $\pi = 3.14159\ldots$.

**2.** Est-ce que tous les nombres réels sont calculables ?

Soit

$$h_i = \begin{cases} 1 & \text{si la MT numéro } i \text{ s'arrête sur l'entrée vide,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et soit le nombre réel suivant :

$$\Omega = 0.h_0h_1h_2h_3h_4h_5h_6h_7h_8h_9\ldots.$$

**3.** Le nombre $\Omega$ est-il calculable ?

Soit

$$x_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si la MT numéro } i \text{ s'arrête sur l'entrée vide en moins de } t \text{ étapes,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et soit la suite :

$$(X_n)_{n>0} = 0.x_1(n)x_2(n)x_3(n)x_4(n)x_5(n)x_6(n)x_7(n)x_8(n)\ldots$$

**4.** Cette suite est-elle calculable (c'est-à-dire, chaque $X_n$ est-il calculable) ?

**5.** Cette suite est-elle croissante ?

**6.** Cette suite est-elle bornée supérieurement ?

**7.** La limite supérieure (plus petite borne supérieure) de $X_i$ est-elle calculable ?

**Exercice 5.** *$M_u$ (1 point)*

**1.** Que vous a appris la construction d'une machine de Turing universelle en TD ?

**Exercice 6.** *Bonus (5 points)*

En DM, vous avez montré que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L_\infty$, avec

$$L_\infty = \{\langle M \rangle \mid M(w) \uparrow \text{ pour tout } w \in \Sigma^*\}.$$

**1.** Que dire de $L_\infty \leq_m^T L_{\bar{u}}$ ?

**2.** Définir ce qu'est une classe d'équivalence de la relation $\leq_m^T$.

**3.** Combien existe-t-il de classes d'équivalence de la relation $\leq_m^T$ ?

**4.** Donner un exemple de langage qui n'est ni dans la classe d'équivalence de $\emptyset$, ni dans celle de $L_u$, ni dans celle de $L_{\bar{u}}$.