

---

**TD 03 – Réductions**


---

**Exercice 1.**

L'arrêt

Indiquer si chacun des énoncés qui suit est vrai ou faux, en justifiant.

1.  $\exists M_{halt} : \forall \langle M \rangle, w : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$ .
2.  $\forall \langle M \rangle, w : \exists M_{halt} : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$ .

**Exercice 2.**

Réductions Turing many-one

Ecrire chacune des réductions (Turing **many-one**) suivantes, et indiquer ce que l'on peut en déduire quant à la récursivité de ces langages.

1. Réduire  $L_{halt} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ s'arrête quand on la lance sur l'entrée vide}\}$  à  $A = \{\langle M \rangle \mid M \text{ s'arrête quand on la lance sur l'entrée } aa\}$ .
2. Réduire  $L_u = \{\langle M \rangle \# w \mid M \text{ accepte le mot } w\}$  à  $B = \{\langle M \rangle \mid a \in L(M)\}$ .
3. Réduire  $L_{\bar{u}} = \{\langle M \rangle \# w \mid M \text{ n'accepte pas } w\}$  à  $C = \{\langle M \rangle \# w \mid M \text{ n'accepte pas } w \text{ mais accepte } bbw\}$ .
4. Réduire  $L$  à  $aL = \{aw \mid w \in L\}$  pour tout langage  $L$ .
5. Réduire  $aL$  à  $L$  pour tout langage  $L$ .
6. Réduire  $L_{stupid} = \{a\}$  à  $L_u$ .

**Exercice 3.**

Avec des réductions Turing many-one...

Montrer que les langages suivants ne sont pas décidables.

1.  $D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ s'arrête quand on la lance sur les entrées } ab \text{ et } ba\}$ .
2.  $E \times F$  avec  $E = \{\langle M \rangle \mid b \in L(M)\}$  et  $F = \{\langle M \rangle \mid a \in L(M) \text{ ou } b \in L(M)\}$ .

Montrer que les langages suivants ne sont pas récursivement énumérables.

3.  $G = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$ .
4.  $H = \{\langle M_1 \rangle \# \langle M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$ .

Montrer que les langages suivants sont récursivement énumérables.

5.  $L_M = \{w \mid w \in L(M)\}$  avec  $M$  une machine de Turing.
6.  $D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ s'arrête quand on la lance sur les entrées } ab \text{ et } ba\}$ .

Montrer que les langages suivants sont décidables.

7.  $I = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle < 2^{2^{1024}} \text{ et } L(M) = \{a\}\}$
8.  $L'_M = \{w \mid w \in L(M)\}$  avec une  $M$  une machine de Turing qui s'arrête toujours.

📎 Du plus « simple » au plus « difficile » à décider, ordonner les langages de cet exercice.

9. Proposer un nouveau langage, qui ne soit pas récursif.
10. Proposer un nouveau langage, qui ne soit pas récursif mais qui soit r.e.