Examen session 2 – Calculabilité (SIN6U05L)

2 heures, **documents et calculatrice non autorisés.**
Ce sujet comporte **2 pages** et **5 exercices**.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. *Notions de base (7 points)*

Compléter les phrases suivantes.

1. Un langage L est *récursif* si et seulement si…
2. Un langage L est *récursivement énumérable* si et seulement si…

Questions diverses.

3. Montrer que tout langage fini (contenant un nombre fini de mots) est récursif.
4. Soient L_1 et L_2 deux langages. Montrer que si $L_1 \leq_m^T L_2$ et L_2 est récursif, alors L_1 est récursif.
5. Donner un exemple de langage non récursif.
6. Montrer que si un langage L est récursivement énumérable et si son complémentaire est récursivement énumérable, alors L est récursif.

Exercice 2. *Machine de Turing (5 points)*

1. Dessiner l'automate d'une machine de Turing qui reconnaît le langage suivant et qui s'arrête toujours :

$$L_2 = \left\{ w_1 w_2 \ldots w_n \in \{a,b\}^* \mid n \geq 4, \text{ et } n \equiv 0 \mod 4, \text{ et } w_2 = b \right\}$$

(rappel : $n \equiv a \mod b \iff \exists k \in \mathbb{N} : n = a + kb$).

2. Donner l'exécution (la séquence des descriptions instantanées des configurations, sous la forme $q_0 aab \vdash bq_1 ab \vdash bbq_2 b \vdash bbaq_3 B \vdash \ldots$) de la machine que vous avez définie en question 1 sur l'entrée $abbaabab$.
3. Peut-on déduire de la question 1 que L_2 est :
   - **(a)** récursif ?
   - **(b)** récursivement énumérable ?

Rappel. $L_{\bar{u}} = \{\langle M \rangle \# w \mid M \text{ n'accepte pas } w\}$ n'est pas récursivement énumérable.

Exercice 3. *Réduction many-one Turing 1 (3 points)*

1. Donner une transformation, sans justifier de sa correction mais en argumentant qu'elle soit calculable, qui permet de montrer que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L_3$, avec

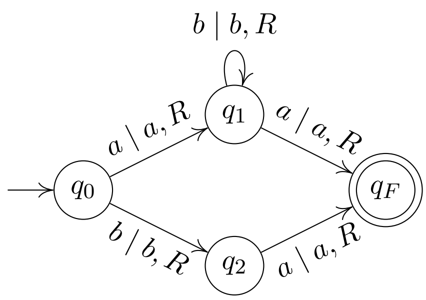
$$L_3 = \{\langle M \rangle \# w \mid M(w) \uparrow\}$$

(rappel : $M(w) \uparrow$ signifie que M ne s'arrête pas quand on la lance sur l'entrée w).

Exercice 4. *Réduction many-one Turing 2 (5 points)*

Dans cet exercice on veut montrer que le langage $L_4 = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ est fini}\}$ n'est pas récursivement énumérable. Étant donné $\langle M \rangle \# w$, considérons $\langle M' \rangle$ avec M' la machine qui simule l'exécution de M sur w sans tenir compte de son entrée, puis qui accepte (son entrée) si et seulement si M accepte w.

1. Etant donnés la machine M ci-dessous et $w = aab$, construire (selon la transformation algorithmique présentée dans l'énoncé) l'automate de la machine M'.



2. À quoi est égal $L(M')$ si M accepte w ?
3. À quoi est égal $L(M')$ si M n'accepte pas w ?
4. Montrer que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L_4$ en utilisant cette transformation.
5. Conclure.

Exercice 5. *Cadeau (2 points)*

1. Dessiner l'automate d'une machine de Turing qui reconnaît le langage suivant et qui s'arrête toujours :

$$L_1 = \Big\{ w_1 w_2 \dots w_n \in \{a, b, c\}^* \mid n \geq 3, \text{ et } w_1 = a, \text{ et } w_3 = c, \text{ et } w_{n-1} = w_2 \Big\}.$$