Examen session 1 – Calculabilité (SIN6U05L)

2 heures, **documents non-autorisés.**
Ce sujet comporte **2 pages** et **5 exercices**.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. *Notions de base (6 points)*

Compléter les phrases suivantes.

1. Un langage L est *récursif* si et seulement si…
2. Un langage L est *récursivement énumérable* si et seulement si…

Questions diverses.

3. Dans la définition des machines de Turing, pourquoi impose-t-on que $B \in \Gamma \setminus \Sigma$? (avec B le symbole blanc, Γ l'alphabet de ruban, et Σ l'alphabet d'entrée)
4. Soient L_1 et L_2 deux langages. Montrer que si $L_1 \leq_m^T L_2$ et L_2 est récursif, alors L_1 est récursif.
5. Parmi les deux affirmations suivantes, laquelle est correcte ?
   (a) Si L est récursif, alors L est récursivement énumérable.
   (b) Si L est récursivement énumérable, alors L est récursif.
6. Donner un exemple de langage non récursivement énumérable, différent† de $L_{\bar{u}}$.
   †Car cette réponse est donnée dans le rappel de l'Exercice 3. Tout langage différent de $L_{\bar{u}}$ convient.
7. Donner si possible un exemple de langage non récursivement énumérable mais récursif.
8. Donner si possible un exemple de langage non récursif mais récursivement énumérable.

Exercice 2. *Machine de Turing (5 points)*

1. Dessiner l'automate d'une machine de Turing qui reconnaît le langage suivant et qui s'arrête toujours :
$$L_1 = \left\{ w_1 w_2 \dots w_n \in \{a,b\}^* \mid n \geq 2, \text{ et } n \equiv 0 \mod 3, \text{ et } w_{n-1} = a \right\}$$
(rappel : $n \equiv a \mod b \iff \exists k \in \mathbb{N} : n = kb + a$).
2. Donner l'exécution (la séquence des descriptions instantanées des configurations, telle que $q_0aab \vdash bq_1ab \vdash bbq_2b \vdash bbaq_3B \vdash \dots$) de la machine que vous avez définie en question 1 sur l'entrée $abbaab$.
3. Peut-on déduire de la question 1 que L_1 est :
   (a) récursif ?
   (b) récursivement énumérable ?

Exercice 3. *Réduction many-one Turing (5 points)*

Rappel : $L_{\bar{u}} = \{\langle M\rangle \# w \mid M$ n'accepte pas $w\}$ n'est pas récursivement énumérable.

1. Montrer que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L_2$, avec

$$L_2 = \{\langle M\rangle \# w \mid M(w)\uparrow\}$$

(rappel : $M(w)\uparrow$ signifie que M ne s'arrête pas quand on la lance sur l'entrée w).

2. Pourquoi peut-on en déduire que L_2 n'est pas récursif ?

Exercice 4. *Théorème de Rice (4 points)*

1. Qu'est-ce qu'une propriété *non triviale* ?

2. Donner un exemple de propriété *triviale*.

3. Cette propriété (celle de votre réponse à la question 2) est-elle intéressante ?

4. Donner un exemple de propriété *non triviale*.

5. Que dit le théorème de Rice de cette propriété (celle de votre réponse à la question 4) ? Répondre en complétant la phrase suivante : Il n'existe pas de machine de Turing qui prenne en entrée…

Exercice 5. *Bonus (5 points)*

1. Montrer que $L_2 \leq_m^T L_\infty$, avec

$$L_\infty = \{\langle M\rangle \mid M(w)\uparrow \text{ pour tout } w \in \Sigma^*\}.$$

2. Que dire de $L_\infty \leq_m^T L_2$?