

TD n° 9

Calculabilité : machines de Turing

BIJECTIONS

Exercice 9.1. Soient A et B deux ensembles, une fonction $f : A \rightarrow B$ est

- injective ssi $\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ (ou la contraposée),
- surjective ssi $\forall b \in B : \exists a \in A : b = f(a)$,
- bijective ssi elle est à la fois injective et surjective.

1. Donner une bijection de \mathbb{N} dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, de \mathbb{N} dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et de Σ^* dans \mathbb{N} .

PROGRAMMER AVEC DES MACHINES DE TURING

Exercice 9.2.

Objectif : voir que l'on peut sauvegarder un symbole (ou plusieurs) dans l'état.

Soit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, q_F)$ la machine de Turing où

- $Q = \{q_0, q_a, q_b, q_F\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, B\}$,
- δ est donnée par

$(q_0, a) \mapsto (q_a, a, R)$	$(q_0, b) \mapsto (q_b, b, R)$		
$(q_a, a) \mapsto (q_a, a, R)$	$(q_a, b) \mapsto (q_a, b, R)$	$(q_b, a) \mapsto (q_b, a, R)$	$(q_b, b) \mapsto (q_b, b, R)$
$(q_a, B) \mapsto (q_F, a, R)$		$(q_b, B) \mapsto (q_F, b, R)$	

1. Dessiner cette machine sous la forme d'un automate.
2. Dans quelle configuration est-on à la fin de l'exécution de M sur le mot d'entrée $abab$?
3. Quelle fonction est calculée par cette machine?

Exercice 9.3.

Objectif : voir que l'on peut facilement faire un décalage avec une MT.

Soit $\Sigma = \{a, b\}$, et la fonction $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ définie par

$$\text{pour tout } w \in \Sigma^* \text{ on a } f(w) = aw$$

Le but étant de décaler tous les symboles d'une case sur la droite (afin de réutiliser cette machine ensuite).

1. Dessiner l'automate d'une machine qui calcule f .

Exercice 9.4.

Objectif : voir qu'une MT peut utiliser (simuler) une autre MT.

Soit $\Sigma = \{a, b\}$, et la fonction $g : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ définie par

$$\text{pour tout } w_0 w_1 \dots w_{2k} \in \Sigma^* \text{ on a } g(w) = w_0 \dots w_{k-1} a w_k \dots w_{2k}$$

Pour simplifier on supposera que les entrées sont toujours de longueur impaire.

1. Dessiner l'automate d'une machine qui calcule g .

PROPRIETES DE CLOTURE

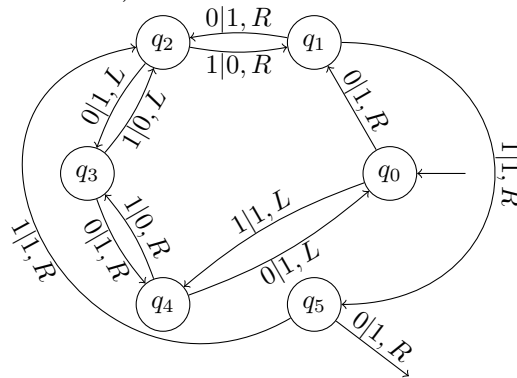
Exercice 9.5. Démontrer les résultats suivants.

1. la famille des langages récurrents est close par complémentation ;
2. les familles des langages récurrents et r.e. sont closes par union et intersection ;
3. Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est récurrent si et seulement si L et $\Sigma^* \setminus L$ sont r.e.

BUSY BEAVER

Exercice 9.6. Considérons des machines de Turing sur l'alphabet binaire $\Gamma = \{1, 0\}$ (0 est le symbole blanc) dont la fonction de transition est $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$. Le concours du castor affairé consiste à, pour un nombre fixé d'états, trouver la machine de Turing qui, partant d'un ruban vide (que des 0), écrit le plus grand nombre de 1 avant de s'arrêter (c'est bien sûr très important que la machine s'arrête pour compter son score).

1. Sauriez-vous obtenir le score 6 dans la catégorie à 3 états ?
2. Voici le meilleur candidat connu pour 6 états. Pouvez-vous estimer son score (combien de 1 sont écrits sur le ruban quand elle s'arrête) ?



PLUS DE PROGRAMMATION AVEC DES MACHINES DE TURING

Exercice 9.7.

Objectif : voir que l'on peut encoder plusieurs rubans en un seul (en augmentant l'alphabet). Nous allons définir une machine de Turing qui reconnaît le langage

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w_0 w_1 \dots w_{2k} \text{ pour } k \in \mathbb{N}, \text{ et } w_k = a\}.$$

L'idée est la suivante. On utilise un ruban sur deux lignes :

- la seconde ligne contient w
- sur la première nous utilisons un marqueur \surd ou le symbole B .

Initialement il n'y a que des B sur le premier ruban, et un mot $u_1 u_2 \dots u_j$ sur le second ruban. Nous allons marquer la case u_0 , puis u_j , puis u_1 , puis u_{j-1} , puis u_2 , etc, jusqu'à trouver le milieu ! Il ne reste alors qu'à dire si c'est bien un symbole a .

1. Donner les alphabets d'entrée et de ruban pour cette machine.
2. Dessiner l'automate d'une machine qui reconnaît ce langage.

Exercice 9.8.

Objectif : voir que l'on peut utiliser d'autres conventions.

1. Peut-on calculer exactement les mêmes fonctions / décider exactement les mêmes langages si la tête de lecture est initialement placée sur la case la plus à droite du mot d'entrée ? (Justifier)
2. Peut-on calculer les mêmes fonctions / décider les mêmes langages si l'on autorise des transitions pour lesquelles la tête de lecture/écriture ne bouge pas (ni L ni R) ? (Justifier)
3. Peut-on calculer les mêmes fonctions / décider les mêmes langages si l'on ajoute la restriction $\Sigma = \{0, 1\}$? Et si en plus $\Gamma = \{0, 1, B\}$? (Justifier)