

TP n° 2**Le solveur Minisat**

(À rendre sous forme d'un rapport le jeudi 13 octobre 23h59.)

L'objectif du TP est de se familiariser avec le solveur *Minisat*, qui permet de décider la satisfaisabilité de formules en forme normale conjonctive. De tels solveurs partagent le même format de représentation des formules en CNF, le format *Dimacs*.

Travail demandé**Exercice 1.**

Première utilisation de Minisat

- (a) Écrire un fichier texte qui contient la formule $(a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg d)$ au format Dimacs (<http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/data/cnf/cnf.html>).
- (b) Tester la satisfaisabilité de cette formule en utilisant le solveur Minisat (<http://minisat.se/>) en vous aidant du guide d'utilisation ci-dessous. La commande est `minisat`. (<http://www.dwheeler.com/essays/minisat-user-guide.html>).
- (c) On considère les la formule :

$$\varphi = (\neg t \rightarrow \neg s) \rightarrow \left(((b \vee t) \rightarrow s) \wedge ((r \wedge m) \rightarrow (b \vee a)) \wedge \neg r \right)$$

- i) Mettre φ sous forme normale conjonctive.
 - ii) Écrire la formule CNF obtenue dans un fichier texte sous format Dimacs
 - iii) Utiliser le solveur Minisat pour décider si φ est satisfaisable. Si oui, décider si elle admet au moins deux valuations satisfaisantes.
- (d) Proposer une procédure qui permettrait de décider si une formule est une tautologie.
- (e) Le principe des tiroirs affirme que n tiroirs ne peuvent contenir $n + 1$ chaussettes si on impose qu'il n'y ait qu'une seule chaussette par tiroir.
- i) Écrire une formule propositionnelle φ_n en forme normale conjonctive, qui exprime le fait que l'on désire ranger $(n + 1)$ objets dans n tiroirs de telle sorte qu'un tiroir ne contienne qu'au plus un objet. À cet effet on pourra introduire $n(n + 1)$ variables propositionnelles $c_{i,j}$, avec $1 \leq i \leq n + 1$ et $1 \leq j \leq n$, qui codent le fait que l'objet i se trouve dans le tiroir j . Ainsi par exemple la clause $(c_{1,1} \vee c_{1,2} \dots \vee c_{1,n})$ traduira le fait que l'objet numéro 1 est rangé dans un des n tiroirs.
 - ii) Conformément au principe des tiroirs, la formule φ_n ainsi obtenue est insatisfaisable. Le vérifier en utilisant le solveur Minisat pour de petites valeurs de n .
 - iii) Que se passe-t-il quand on fait croître n ?

Exercice 2.

Réduction de 3-COLOR à SAT

Le problème 3-COLOR consiste à décider si un graphe est 3-coloriable.

3-COLOR

Instance : Un graphe non-orienté $G = (V, E)$

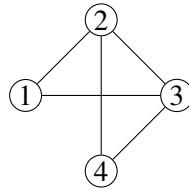
Question : G admet-il une 3-coloration valide ?

1. Proposer une réduction en temps polynomial de 3-COLOR au problème SAT.

Un graphe est représenté par une suite de nombres de la façon suivante. Le premier entier indique le nombre de sommets n , le second le nombre d'arêtes p . Viennent ensuite $2p$ entiers compris entre 1 et n , chacun des p couple décrivant les extrémités d'une arête. Ainsi,

4 5 1 2 2 3 3 4 1 3 2 4

représente le graphe à 4 sommets et 5 arêtes suivant.



2. Dessiner le graphe représenté par la séquence

10 15 1 2 2 3 3 4 4 5 5 1 1 6 2 7 3 8 4 9 5 10 6 8 7 9 8 10 9 6 10 7.

3. Implémenter une procédure qui, étant donné un graphe passé en argument selon le format décrit ci-dessus, produit la formule (au format Dimacs) obtenue en appliquant votre réduction de la première question.
4. Utiliser cette procédure pour décider si un graphe donné est 3-coloriable, en utilisant le solveur Minisat.
5. Améliorer le programme précédent de telle sorte que si le graphe est 3-coloriable alors un 3-coloriage est obtenu. Ce programme doit indiquer la couleur de chaque sommet.
6. Tester votre algorithme sur des exemples simples et sur des graphes aléatoires. Que se passe-t-il quand on fait grossir la taille des graphes ?