N. Creignou, F. Olive, E. Perdereau et K. Perrot

TP nº 2

Le solveur Minisat

(À présenter en séance de TP le vendredi 13 novembre.)

L'objectif du TP est de se familiariser avec le solveur *Minisat*, qui permet de décider la satisfaisabilité de formules en forme normale conjonctive. De tels solveurs partagent le même format de représentation des formules en CNF, le format *Dimacs*.

Travail demandé

Exercice 1. *Première utilisation de Minisat*

(a) Écrire un fichier texte qui contient la formule $(a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg d)$ au format Dimacs (`http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/data/cnf/cnf.html`).

(b) Tester la satisfaisabilité de cette formule en utilisant le solveur Minisat (`http://minisat.se/`) en vous aidant du guide d'utilisation ci-dessous. La commande est `minisat`. (`http://www.dwheeler.com/essays/minisat-user-guide.html`).

(c) On considère les la formule :

$$\varphi = (\neg t \rightarrow \neg s) \rightarrow \Big(\big((b \vee t) \rightarrow s\big) \wedge \big((r \wedge m) \rightarrow (b \vee a)\big) \wedge \neg r\Big)$$

i) Mettre φ sous forme normale conjonctive.

ii) Écrire la formule CNF obtenue dans un fichier texte sous format Dimacs

iii) Utiliser le solveur Minisat pour décider si φ est satisfaisable. Si oui, décider si elle admet au moins deux valuations satisfaisantes.

(d) Proposer une procédure qui permettrait de décider si une formule est une tautologie.

(e) Le principe des tiroirs affirme que n tiroirs ne peuvent contenir $n+1$ chaussettes si on impose qu'il n'y ait qu'une seule chaussette par tiroir.

i) Écrire une formule propositionnelle φ_n en forme normale conjonctive, qui exprime le fait que l'on désire ranger $(n+1)$ objets dans n tiroirs de telle sorte qu'un tiroir ne contienne qu'au plus un objet. À cet effet on pourra introduire $n(n+1)$ variables propositionnelles $c_{i,j}$, avec $1 \leq i \leq n+1$ et $1 \leq j \leq n$, qui codent le fait que l'objet i se trouve dans le tiroir j. Ainsi par exemple la clause $(c_{1,1} \vee c_{1,2} \ldots \vee c_{1,n})$ traduira le fait que l'objet numéro 1 est rangé dans un des n tiroirs.

ii) Conformément au principe des tiroirs, la formule φ_n ainsi obtenue est insatisfaisable. Le vérifier en utilisant le solveur Minisat pour de petites valeurs de n.

iii) Que se passe-t-il quand on fait croître n ?

Exercice 2. *Réduction de* 3-COLOR *à* SAT

Le problème 3-COLOR consiste à décider si un graphe est 3-coloriable.

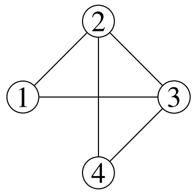
3-COLOR
Instance : Un graphe non-orienté $G = (V, E)$
Question : G admet-il une 3-coloration valide ?

1. Proposer une réduction en temps polynomial de 3-COLOR au problème SAT.

Un graphe est représenté par une suite de nombres de la façon suivante. Le premier entier indique le nombre de sommets n, le second le nombre d'arêtes p. Viennent ensuite $2p$ entiers compris entre 1 et n, chacun des p couple décrivant les extrémités d'une arête. Ainsi,

```
4 5 1 2 2 3 3 4 1 3 2 4
```

représente le graphe à 4 sommets et 5 arêtes suivant.



2. Dessiner le graphe représenté par la séquence

```
10 15 1 2 2 3 3 4 4 5 5 1 1 6 2 7 3 8 4 9 5 10 6 8 7 9 8 10 9 6 10 7.
```

3. Implémenter une procédure qui, étant donné un graphe passé en argument selon le format décrit ci-dessus, produit la formule (au format Dimacs) obtenue en appliquant votre réduction de la première question.

4. Utiliser cette procédure pour décider si un graphe donné est 3-coloriable, en utilisant le solveur Minisat.

5. Améliorer le programme précédent de telle sorte que si le graphe est 3-coloriable alors un 3-coloriage est obtenu. Ce programme doit indiquer la couleur de chaque sommet.

6. Tester votre algorithme sur des exemples simples et sur des graphes aléatoires. Que se passe-t-il quand on fait grossir la taille des graphes ?