Partiel - durée : 2h

Définition. Un automate à pile $\mathcal{P}$ est un 7-uplet $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \$, F)$ où
– Q est un ensemble fini d'états
– Σ

Définition. Soit $G = (V, \Sigma, P, S)$ une grammaire hors-contexte. La grammaire est dite *autoenchâssante*[1] s'il existe $X \in V$ tel que $X \stackrel{+}{\Rightarrow} \alpha X \beta$ avec $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^+$ ($\alpha, \beta \neq \epsilon$).
Un langage hors-contexte L est dit *autoenchâssant* si toute grammaire hors-contexte le générant est autoenchâssante.

Exercice 1. *bli*

1. Remplir le tableau suivant sur la hiérarchie de Chomsky.

Classe de langage	Automate minimal	Type de grammaire
Régulier		
		Hors-contexte

Exercice 2. *complémentaires*

Pour chacun des langages L définis par les expressions rationnelles suivantes, donner un AFD reconnaissant $A^* \setminus L$ (pour $A = \{a, b\}$) :

1. a
2. $(aba)^*$
3. $(ab + ba + a^*bbb)^*$

Exercice 3. *rationnels ?*

Les langages suivants sont-ils rationnels ? Justifier.

1. $\{a^n b a^n, n \geq 0\}$
2. Le langage des mots pour lesquels a et b n'ont pas la même parité.
3. Le langage des mots n'ayant pas le même nombre de a que de b.

Exercice 4. *Autoenchâssements*
On souhaite montrer le théorème suivant :

Théorème. *Un langage hors-contexte est régulier si et seulement s'il n'est pas autoenchâssant.*

1. Montrer l'implication directe.

On veut montrer l'implication inverse. Soit donc un langage L hors-contexte non autoenchâssant. Soit $G = (V, \Sigma, P, S)$ une grammaire hors-contexte le générant telle que tout symbole non terminal est *accessible*[2] et sans règle de la forme $X \to Y$, $X, Y \in V$.

1. Ou *self-embedding* en anglais.
2. Pour tout $X \in V$, il existe une dérivation $S \stackrel{*}{\Rightarrow} \alpha X \beta$.

2. Supposons que pour tout X, il existe une dérivation $X \overset{\star}{\Rightarrow} \gamma S \gamma'$. Montrer qu'alors, G est nécessairement de type 3.

3. On suppose maintenant qu'il existe $X \in V$ tel que $X \overset{\star}{\nRightarrow} \gamma S \gamma'$. Montrer par induction sur $|V|$ que G est de type 3. Indication : vous pouvez utiliser les résultats de l'exercice 1.

Exercice 5. *mélange*

Soit Σ un alphabet fini. Soient u et v deux mots sur Σ^*. On appelle mélange des mots u et v, et l'on note $\mathrm{Mel}(u, v)$ l'ensemble des mots de Σ^* défini par :
- si $u = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u, v) = \{v\}$
- si $v = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u, v) = \{u\}$
- si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x, y \in \Sigma$, $\mathrm{Mel}(u, v) = x.\,\mathrm{Mel}(u', v) \cup y.\,\mathrm{Mel}(u, v')$.

Si L et L' sont deux langages, on définit $\mathrm{Mel}(L, L') = \bigcup_{u \in L, v \in L'} \mathrm{Mel}(u, v)$.

1. On considère les langages $L = (aa)^*$ et $L' = (bbb)^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L, L')$ est rationnel.
2. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ?
3. On considère $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $L' = c^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L, L')$ est algébrique.
4. Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.
5. Qu'en est-il du mélange de deux langages algébriques ?

Exercice 6.

1. Exhiber un automate fini déterministe reconnaissant par état final et pile vide le langage suivant
$$L = \{a^n b^m | n = m \vee n = m + 2\}$$