TD 13 – Riri, Fifi et Loulou ne vous seront d'aucune aide.

Exercice 1. *Ceux-là font travailler l'imagination sans raconter d'histoire...*

Dans tout cet exercice les entrées (éventuelles) et sorties des machines de Turing seront codées en unaire.

Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des machines de Turing d'alphabet de ruban $\{B, 1\}$ à $n+1$ états $q_0, \ldots, q_n$ où q_0 est l'état initial et q_n l'état d'acceptation, fonctionnant sur un unique ruban bi-infini avec une seule tête.

Le "championnat du castor affairé" est un jeu proposé aux machines de Turing de $\mathcal{M}_n$. Gagne celle qui réussit à écrire le plus grand nombre sur le ruban à partir de l'entrée vide avant de s'arrêter (il est donc bien entendu que la machine *doit* s'arrêter).

1. Montrer que, pour n fixé, l'ensemble des nombres que peuvent écrire les machines de $\mathcal{M}_n$ avant de s'arrêter admet un maximum $C(n)$ (la machine réalisant ce maximum est déclarée vainqueur de la compétition du castor affairé en catégorie n). Montrer que la fonction $C : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

2. Que vaut $C(2)$?

3. Soit f une fonction calculable par une machine de Turing M_f à n états. Montrer que l'on peut construire une machine de Turing M_g qui part de l'entrée vide et écrit $f(f(x))$ sur le ruban avant de s'arrêter. Quel est le nombre d'état de M_g ?

4. Soit f une fonction calculable, expliquer pourquoi la fonction

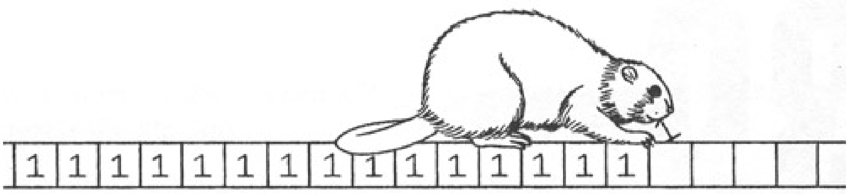
$$F(x) = \sum_{0 \leq i \leq x} (f(i) + i^2)$$

est également calculable.

5. En utilisant les questions précédentes, montrer que pour toute fonction calculable f, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $C(n) > f(n)$. En déduire que C n'est pas récursive.

6. Trouver une autre preuve de la non-récursivité de C, qui utilise le théorème de récursion de Kleene.

7. Soit S la fonction qui à n associe le nombre maximum d'étapes de calcul d'une machine de Turing à $n+1$ états (dont un état initial et un état d'acceptation) qui s'arrête. Montrer que S n'est pas récursive.



Exercice 2. *Le fixède poilleunte.*

Voici le *second théorème de récursion* de Kleene, aussi appelé *théorème du point fixe* :

Pour toute fonction totale calculable $F,$ il existe e tel que $\varphi_e \simeq \varphi_{F(e)}$

où $\varphi_e \simeq \varphi_{F(e)}$ signifie que pour tout n, soit à la fois $\varphi_e(n)$ et $\varphi_{F(e)}(n)$ sont définies et leurs valeurs sont égales, soit aucune n'est définie.
F est également appelée "transformation de programme".

1. Dériver le résultat vu en cours de ce théorème.
2. Soit F la transformation de programme qui inverse l'état initial et l'état d'arrêt d'une machine de Turing. Donner un point fixe pour cette transformation.

Exercice 3. *la loi de Murphy de l'informatique.*

Dans cet exercice, on demandera d'utiliser le théorème de Rice.

1. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si la machine donnée en entrée ne s'arrête sur aucune entrée ?
2. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si le domaine de la machine donnée en entrée est infinie ?
3. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si les deux machines passées en argument calculent la même fonction ?
4. Montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive f telle que $f(x) = 1$ si $\phi_x(x)$ est défini et 0 sinon.

Exercice 4. *Sommes nous dans les décimales de π ?*

Un nombre réel a est dit *récursif* s'il est *récursivement approximable par des rationnels*, c'est-à-dire s'il existe des fonctions récursives F et G de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout $n > 0$ on ait $G(n) > 0$ et $\left| |a| - \frac{F(n)}{G(n)} \right| \leq \frac{1}{n}$.

1. Montrer que tout nombre rationnel est récursif.
2. Montrer que les nombres $\sqrt{2}$, e et π sont récursifs.
3. La coupure dans les rationnels associée au nombre réel a se code par la relation suivante sur les entiers :
$$\mathcal{A} = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid j \neq 0 \text{ et } \frac{i}{j} < |a| \right\}$$
Montrer que le réel a est récursif si et seulement si la relation $\mathcal{A}$ est récursive.
4. Montrer que le nombre réel a est récursif si et seulement s'il existe un *développement décimal récursif* de a, c'est-à-dire une fonction récursive $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n > 0$ on ait $H(n) \leq 9$ et $|a| = \sum_{n \geq 0} H(n).10^{-n}$.
5. Montrer que l'ensemble des réels récursifs forme un sous-corps dénombrable de $\mathbb{R}$, stable par quelques fonctions dont on donnera des exemples.
6. Donner un exemple de réel non récursif.