TD 10 – Mc Neo Gyver a du courrier pour toi.

Exercice 1. *La matrice*

Soit Σ un alphabet fini, $|\Sigma| \geq 2$. On dira qu'on simule une machine de Turing d'alphabet Σ calculant la fonction f par une machine de Turing d'alphabet Σ' calculant la fonction g s'il existe un entier k et une fonction injective $\phi : \Sigma \to \Sigma'^k$ telle que pour toute entrée x de la première, on ait $g(\phi^\star(x)) = \phi^\star(f(x))$ où $\phi^\star$ est l'extension naturelle de ϕ à $\Sigma^\star$.

1. Simuler une machine de Turing à un ruban d'alphabet Σ par une machine de Turing d'alphabet $\{0, 1, B\}$.

Exercice 2. *Pas besoin de lunettes pour voir en 4D.*

Supposons qu'une machine de Turing s'arrête au bout de t étapes de calcul en consommant s cases mémoires.

✎ Quelle(s) relation(s) existent entre t et s ?

Exercice 3. *PCP, en français ou en anglais*

Σ est un alphabet fini et P un ensemble fini de paires de mots sur Σ. Le Problème de Correspondance de Post associé à Σ, P est l'existence d'une suite non vide $(v_i, w_i)_i$ d'éléments de P telle que la concaténation des v_i soit égale à la concaténation des w_i. Le Problème de Correspondance de Post Modifié est celui de l'existence d'une telle suite lorsque le premier terme est fixé.

1. Résoudre PCP pour les instances suivantes :
   (a) $P = (aab, ab), (bab, ba), (aab, abab)$
   (b) $P = (a, ab), (ba, aba), (b, aba), (bba, b)$
   (c) $P = (ab, bb), (aa, ba), (ab, abb), (bb, bab)$
   (d) $P = (a, abb), (aab, b), (b, aa), (bb, bba)$
2. Montrer que si Σ ne contient qu'une lettre le problème est décidable.
3. Montrer l'équivalence entre PCP et PCPM.
4. Peut-on se passer des couples de la forme (w, w) dans PCPM ?
5. Montrer que PCP est indécidable.

Exercice 4. *Système D*

Soit M une machine de Turing à un ruban. On supposera que pour tout mot en entrée de M ce mot est entièrement lu par M au cours du calcul.

1. Montrez que pour tout entier $c \geq 1$ il existe une constante a et une machine de Turing M' à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que M et telle que si M consomme $s(|x|)$ cases mémoires sur l'entrée x alors M' consomme au plus $a + |x| + s(|x|)/c$ cases mémoires sur la même entrée.
2. Montrez que pour tout entier $c \geq 1$ il existe une constante a et une machine de Turing M' à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que M et telle que si M s'arrête sur l'entrée x en $t(|x|)$ étapes alors M' s'arrête sur la même entrée en $a + |x| + t(|x|)/c$ étapes au plus.