# TD 8 – La recette du gâteau tunnel

**Exercice 1.** *j'aime les BN*

1. Donner un automate à pile déterministe reconnaissant le langage suivant :

$$L = \{a^m b^n c^{2(m+n)} | \, n, m \geq 0\}$$

2. Prouver la correction de votre automate.

**Exercice 2.** *Le Mont-Blanc dans tous ses états*

✎ Soit $A = (Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, K)$ un automate à pile déterministe reconnaissant par sommet de pile et état final (une configuration $(q, z\alpha)$ est acceptante si $(q, z)$ est élément d'un certain ensemble $K \subseteq Q \times Z$). Montrer que l'on peut effectivement construire un automate à pile déterministe équivalent reconnaissant par état final.

**Exercice 3.** *(cri)* $Min(L)$

Dans cet exercice, on notera $L(A)$ le langage accepté par état final (il peut y avoir plusieurs états finaux) par $A$ et $N(A)$ le langage accepté par pile vide par l'automate $A$.
Soit $L_1$ un langage et $A_1$ un automate déterministe tel que $L_1 = N(A_1)$.

1. Montrez que (vous avez de la mémoire, et que) $L_1$ a la propriété du préfixe (c'est à dire que $a \in L_1, x \in \Sigma^+ \Rightarrow a.x \notin L_1$).

Soit $L_2$ un langage avec la propriété du préfixe et $A_2$ un automate déterministe tel que $L(A_2) = L_2$.

2. Montrer qu'il existe $A'_2$ un automate déterministe tel que $L_2 = N(A'_2)$.

On notera $Min(L)$ le langage de tous les mots de $L$ n'ayant pas de préfixe propre dans $L$.
Soit $L_3$ un langage et $A_3$ un automate déterministe tel que $L_3 = L(A_3)$.

3. Montrer qu'il existe $A'_3$, un automate déterministe tel que $N(A'_3) = Min(L_3)$.

Soit $L_4$ le langage des palindromes sur $\{a, b\}$ comportant 2 ou 3 $b$.

4. Exhibez $G_4$, une grammaire (hors contexte) non ambigüe telle que $L(G_4) = L_4$.
5. En vous intéressant à $Min(L_4)$, concluez sur la puissance relative des automates à pile déterministes et des grammaires (hors contexte) non ambigües.

**Exercice 4.** *Un bon entraînement pour vendredi*

Soit $\Sigma$ un alphabet fini. Soient $u$ et $v$ deux mots sur $\Sigma^*$. On appelle mélange des mots $u$ et $v$, et l'on note $\mathrm{Mel}(u,v)$ l'ensemble des mots de $\Sigma^*$ défini par :

– si $u = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{v\}$

– si $v = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{u\}$

– si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x, y \in \Sigma$, $\mathrm{Mel}(u,v) = x.\,\mathrm{Mel}(u',v) \cup y.\,\mathrm{Mel}(u,v')$.

Si $L$ et $L'$ sont deux langages, on définit $\mathrm{Mel}(L,L') = \bigcup_{u\in L, v\in L'} \mathrm{Mel}(u,v)$.

1. On considère les langages $L = (aa)^*$ et $L' = (bbb)^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L,L')$ est rationnel.
2. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ?
3. On considère $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $L' = c^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L,L')$ est algébrique.
4. Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.
5. Qu'en est-il du mélange de deux langages algébriques ?