# TD 7 – Grand-mère a un pacemaker

**Exercice 1.** *Échauffements*

Donner des automates à piles reconnaissant les langages suivants par pile vide et par état final, et justifier leur correction :

1. $L = \{u \in \{a, b\}^* : |u|_a = 2|u|_b\}$ ;
2. $L = \{a^i b^j c^k : i \neq j \text{ ou } j \neq k\}$.

**Exercice 2.** *état vide ou pile finale*

✎ Montrer que les acceptations par pile vide et par état final sont équivalentes.

**Exercice 3.** *Collision avec Descartes*

Montrer que l'intersection d'un langage algébrique et d'un langage rationnel est algébrique.

**Définition.** Une grammaire hors-contexte $G = (V, \Sigma, P, S)$ est sous *forme normale de Greibach* si toutes ses règles sont de la forme
i) $A \to aB_1 \dots B_n$
ii) $A \to a$
iii) $S \to \epsilon$
Où $B_1, \dots, B_n \in V - \{S\}$ et $a \in \Sigma$.
On l'appelle également *forme m-standard* lorsque $n \leq m$ pour toutes les règles.

**Exercice 4.** *G ah frotter*

Nous allons prouver le théorème suivant

**Théorème.** *Tout langage hors-contexte peut être généré par une grammaire hors-contexte sous forme normale de Greibach.*

1. Montrer le lemme suivant
   **Lemme** (substitution). *Soit $G = (V, \Sigma, P, S)$ une GHC, $\pi = A \to \alpha_1 B \alpha_2$ une production de $P$ avec $B \to \beta_1 | \dots | \beta_r$ la règle*[1] *de $P$ avec $B$ à gauche. Soit $G_1 = (V, \Sigma, P_1, S)$ avec*

   $$P_1 = (P - \{\pi\}) \cup \{A \to \alpha_1\beta_1\alpha_2 | \alpha_1\beta_2\alpha_2 | \ \dots \ | \alpha_1\beta_r\alpha_2\}$$

   *alors $L(G_1) = L(G)$.*

2. Montrer le lemme suivant
   **Lemme** (inversion). *Soit $G = (V, \Sigma, P, S)$ une GHC ne produisant pas le mot vide et*

   $$A \to A\alpha_1 | \ \dots | \ A\alpha_r$$

1. sous forme de Backus–Naur (BNF)

*avec $\alpha_i \neq \epsilon$ pour tout $i$, l'ensemble des règles avec $A$ en tête telles que le symbole le plus à gauche du corps soit $A$. Soit*

$$A \to \beta_1 | \dots | \beta_s$$

*l'ensemble des règles restantes avec A en tête. Soit $G_1 = (V \cup \{Z\}, \Sigma, P_1, S)$, où $Z$ est un nouveau symbole non-terminal et $P_1$ l'ensemble des productions de $P$ avec toutes les production avec $A$ en tête remplacées par*

$$\begin{aligned} A &\to \beta_1 Z| \ \dots \ | \ \beta_s Z| \ \beta_1| \ \dots | \ \beta_s \\ Z &\to \alpha_1 Z| \ \dots \ |\alpha_r Z| \ \alpha_1| \ \dots | \ \alpha_r \end{aligned}$$

*alors $L(G_1) = L(G)$.*

Sans perte de généralité, on partira d'une grammaire $G = (V, \Sigma, P, S)$ sous forme normale de Chomsky. **Supposons pour le moment que $G$ ne produit pas le mot vide**.

**3.** Soit $V = \{A_1, \dots, A_m\}$ avec $S = A_1$. L'ensemble des règles de production peut être classé en deux catégories

$$\begin{aligned} &A_i \to BC \text{ avec } B, C \in V \\ &A_i \to a \end{aligned}$$

Par induction sur les membres gauches des règles à partir de $A_1$, construisez une grammaire équivalente dont les règles de production peuvent être classées en trois catégories

(a) $A_i \to A_j\alpha$ avec $i < j, \alpha \in ((V - \{S\}) \cup \{Z_1, \dots, Z_n\})^+$
(b) $A_i \to a\alpha$ avec $a \ \in \Sigma, \alpha \in ((V - \{S\}) \cup \{Z_1, \dots, Z_n\})^*$
(c) $Z_i \to \alpha$ avec $\alpha \in ((N - \{S\}) \cup \{Z_1, \dots, Z_n\}^+$

**4.** Toujours sous l'hypothèse que le mot vide n'appartient pas au langage, conclure.

**5.** Conclure si de plus $\epsilon$ est dans le langage.

**6.** En quoi la forme normale de Greibach est-elle intéressante ?

**7.** Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Greibach

$$\begin{aligned} &A_1 \to A_2 A_3 \\ &A_2 \to A_1 A_2 | \ 1 \\ &A_3 \to A_1 A_3 | 0 \end{aligned}$$

**Exercice 5.** *Arrière ! Grammaires*

Donner des grammaires algébriques engendrant les langages suivants.

**1.** L'ensemble des palindromes sur $\{a, b\}$ et son complémentaire.

**2.** L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ de longueur impaire.

**3.** L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant le même nombre d'occurrences de $a$ que de $b$.

**4.** L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant deux fois plus de $a$ que de $b$.

**5.** $\{w\#\overline{w}\#, \ w \in (a + b)^*\}$.

**6.** $\{w\#w' | w, w' \in (a + b)^*$ et $w \neq w'\}$.

**7.** L'ensemble des mots de $(a + b)^*$ qui ne sont pas de la forme $ww$.