TD 3 – Salade d'automates

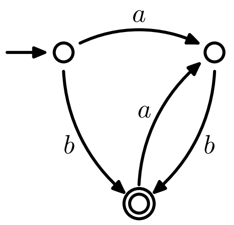
Exercice 1. *Expression*

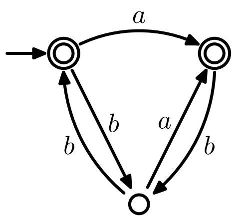
Donner des automates finis reconnaissant les langages définis par les expressions rationnelles suivantes.

1. a^*b^*
2. $(a \cup b)aab(a \cup b)^*$
3. $(b \cup \epsilon)((a \cup ab)^* \cup (bb)^*)^*$
4. $b\big((aab \cup b)^*a(aa)^*\big)^*b^*$

Exercice 2. *Automate*

Donner des expressions rationnelles pour les langages reconnus par les automates suivants.

1. 

2. 

Exercice 3. *Rationnel ?*

Parmi les langages suivants lesquels sont rationnels ? Justifiez vos réponses :

1. $\{a^{2n},\ n \geq 0\}$.
2. $\{a^m b^n a^{m+n},\ m \geq 0 \text{ et } n \geq 0\}$.
3. $\{a^p,\ p \text{ premier}\}$.
4. L'ensemble des mots qui n'ont pas trois a consécutifs.
5. L'ensemble des mots qui ont un nombre égal de a et de b.
6. L'ensemble des mots qui sont des palindromes sur $\Sigma = \{a, b\}$.
7. $\{u\overline{u}v \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$ où $\overline{u}$ est le miroir de u, $\overline{abb} = bba$.
8. $\{uv\overline{u} \mid u, v \in \{a, b\}^+\}$.
9. $\{a^i b^j, \mathrm{pgcd}(i, j) = 1\}$.
10. $\{a^i b^j, i \geq j\}$.

Exercice 4. *Lex L. (contre Superman)*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ. On munit Σ d'un ordre total et on considère l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur Σ^*. On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \mid \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

c'est-à-dire que pour chaque longueur de mots dans L, on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.

✎ Montrer que L_{lex} est rationnel.

Exercice 5. *Certains disent qu'il est homo*

Soit Σ un alphabet fini. Un morphisme $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ est une application vérifiant, pour tous mots u, v, $h(uv) = h(u)h(v)$. Ainsi, un morphisme est défini dès qu'on se donne les images des mots à une lettre. Si L est un langage sur l'alphabet Σ et h un morphisme, on note $h(L)$ l'ensemble $\{h(u)|u \in L\}$.

1. Décrire $h(L)$ dans les cas suivants, où l'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.
   - $h(a) = ab$, $h(b) = \epsilon$, $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$.
   - $h(a) = ab$, $h(b) = abab$, L est défini par l'expression rationnelle b^*ab^*.
2. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h(L)$ rationnel. indice : exprime-toi de façon rationnelle.

Pour un langage L et un morphisme h sur l'alphabet Σ, on note $h^{-1}(L)$ l'ensemble $\{v \in \Sigma^* | h(v) \in L\}$.

3. Donner une expression de $h^{-1}(L)$ dans les cas suivants.
   - $\Sigma = \{a, b\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $L = \{a^i b^j | i \geq j\}$.
   - $\Sigma = \{a, b, c\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $h(c) = ba$, L défini par $a(ba)^*$.
4. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h^{-1}(L)$ rationnel.
5. Les questions 2 et 4 sont-elles les réciproques l'une de l'autre ?

Exercice 6. *L^2*

Soit $L \subseteq \{a, b\}^*$ un langage.

1. A-t-on nécessairement (L rationnel $\Rightarrow L^2$ rationnel) ?
2. A-t-on nécessairement (L^2 rationnel $\Rightarrow L$ rationnel) ?
3. Que deviennent ces implication pour un langage à une lettre ?