TD 2 – Automates farcis

Exercice 1. *Échauffements*

Donner des automates finis qui reconnaissent les langages suivants.

1. $L_1 = \{a^{32n} | n \in \mathbb{N}\}$.
2. $L_2 =$ ensemble des mots qui ne possèdent pas trois a consécutifs et qui ont un nombre pair de b.
3. $L_3 = \{a^i|$ Le chiffre 7 apparaît i fois consécutives dans le développement de π en base $10\}$

Exercice 2. *PK*

Soit $L = \{1^{n^2} | n \geq 0\}$

✎ Montrer que L n'est pas rationnel.

Exercice 3. *Extrait de partiel*

Soit $L \subset \{a, b\}^*$ le plus petit langage tel que
- $\varepsilon \in L$
- Si $w \in L$, $awb \in L$;
- Si $w_1, w_2 \in L$, leur concaténation $w_1 w_2$ est dans L.

✎ Montrer que L n'est pas régulier.

Exercice 4. *Jus d'automates*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Montrer que les langages suivants sont rationnels.

1. CYCLE(L) = $\{x_1 x_2, x_1, x_2 \in \Sigma^*$ et $x_2 x_1 \in L\}$
2. MAX(L) = $\{x \in L, \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
3. MIN(L) = $\{x \in L,$ aucun préfixe propre de x n'est dans $L\}$
4. INIT(L) = $\{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^*, xy \in L\}$
5. $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^*$ avec $xy \in L$ et $|y| = |x|\}$

Exercice 5. *Lex L. (contre Superman)*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ. On munit Σ d'un ordre total et on considère l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur Σ^*. On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \mid \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

c'est-à-dire que pour chaque longueur de mots dans L, on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.

✎ Montrer que L_{lex} est rationnel.

Exercice 6. *Certains disent qu'il est homo*

Soit Σ un alphabet fini. Un morphisme $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ est une application vérifiant, pour tous mots u, v, $h(uv) = h(u)h(v)$. Ainsi, un morphisme est défini dès qu'on se donne les images des mots à une lettre. Si L est un langage sur l'alphabet Σ et h un morphisme, on note $h(L)$ l'ensemble $\{h(u) | u \in L\}$.

1. Décrire $h(L)$ dans les cas suivants, où l'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.
   - $h(a) = ab$, $h(b) = \epsilon$, $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$.
   - $h(a) = ab$, $h(b) = abab$, L est défini par l'expression rationnelle $b^* ab^*$.
2. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h(L)$ rationnel. indice : exprime-toi de façon rationnelle.

Pour un langage L et un morphisme h sur l'alphabet Σ, on note $h^{-1}(L)$ l'ensemble $\{v \in \Sigma^* | h(v) \in L\}$.

3. Donner une expression de $h^{-1}(L)$ dans les cas suivants.
   - $\Sigma = \{a, b\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $L = \{a^i b^j | i \geq j\}$.
   - $\Sigma = \{a, b, c\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $h(c) = ba$, L défini par $a(ba)^*$.
4. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h^{-1}(L)$ rationnel.
5. Les questions 2 et 4 sont-elles les réciproques l'une de l'autre ?

Exercice 7. *Toi, tu t'ennuies...*

1. SQRT(L) = $\{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|^2\}$
2. LOG(L) = $\{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = 2^{|x|}\}$
3. $L' = \{a_2 a_1 a_4 a_3 \ldots a_{2n} a_{2n+1} | a_1 a_2 \ldots a_{2n} \in L,\ a_i \in \Sigma\}$
4. $L' = \{a_1 a_3 \ldots a_{2n-1} | a_1 a_2 \ldots a_{2n} \in L,\ a_i \in \Sigma\}$