
TD 08 – Salade d’automates

Exercice 1.*Equivalences*

Le but de cet exercice est de donner une preuve possible de l’équivalence des grammaires linéaires à gauche, des automates finis non déterministes, et des expressions régulières.

1. Soit R une expression régulière. Construire une grammaire linéaire à gauche générant $L(R)$. Pouvez-vous modifier votre grammaire pour que toutes ses règles soient de la forme $X \rightarrow aY$ ou $X \rightarrow a$?
2. Soit $G = (V, T, S, P)$ une grammaire linéaire à gauche. Sans perte de généralité, on peut supposer que toutes les règles sont de la forme $X \rightarrow aY$ ou $X \rightarrow a$. Décrire un automate fini non déterministe reconnaissant $L(G)$.
3. Soit A un automate fini non déterministe. On numérote ses états de 1 à n , en supposant par exemple que l’état initial a le numéro 1. Pour tout $(i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3$, on note L_{ij}^k l’ensemble des mots w tels qu’il existe dans A un chemin de l’état i à l’état j étiqueté par w , lequel chemin n’utilise que les k premiers états¹ mis à part les deux extrémités le cas échéant. On note R_{ij}^k une expression régulière représentant L_{ij}^k .
 - (a) Comment s’exprime le langage reconnu L par A en fonction des L_{ij}^k ? Donner une expression régulière R correspondante en fonction des R_{ij}^k .
 - (b) Expliquer comment construire l’expression régulière R .

Exercice 2.*Lex L. (contre Superman)*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ . On munit Σ d’un ordre total et on considère l’ordre lexicographique \leq_{lex} sur Σ^* . On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \mid \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

c’est-à-dire que pour chaque longueur de mots dans L , on ne garde que le plus petit pour l’ordre lexicographique.

 Montrer que L_{lex} est rationnel.

Exercice 3.*C’est le BORD(L)*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ . Les langages suivants sont-ils nécessairement rationnels ?

Soit $A = (\mathcal{Q}, i, F, \delta)$ un AFD reconnaissant le langage L .

1. $CYCLE(L) = \{x_1x_2 \mid x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ et } x_2x_1 \in L\}$
2. $MAX(L) = \{x \in L \mid \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
3. $MIN(L) = \{x \in L \mid \text{aucun préfixe propre de } x \text{ n’est dans } L\}$
4. $INIT(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^*, xy \in L\}$
5. $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|\}$

1. C’est-à-dire de numéro inférieur ou égal à k .

6. $\text{LOG}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = 2^{|x|}\}$
7. $\text{SQRT}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|^2\}$
8. $\text{BORD}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x, y, z \in \Sigma^*, |x| = |y| = |z|, w = xz \text{ et } xyz \in L\}$