TD 1 – Réécriture abstraite

Exercice 1. *Des nombres habilités*

Rappel : deux ensembles sont en bijection ssi il existe une injection (resp. une surjection) du premier vers le deuxième, et du deuxième vers le premier.

1. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est-il dénombrable ? Et $\mathbb{Q}$? Et $\mathbb{R}$?
2. L'ensemble $\mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?
3. Montrer que l'union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Définition. Soit $\leq$ une relation d'ordre sur les cardinaux définie par $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ s'il existe une injection de A dans B. On définit alors l'égalité $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ par $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B) \wedge \mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(A)$.

4. Montrer que $\mathrm{card}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$.
5. Montrer que $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble infini pour cette relation. *Indication.* Utiliser la définition de Dedekind : un ensemble est infini s'il a une injection propre.
6. Montrer que pour tout ensemble E, il existe un ensemble F tel que $\mathrm{card}(F) > \mathrm{card}(E)$.

Exercice 2. *Lapin compris*

Un enclos contient des lapins roses et des lapins violets, à la queue-leu-leu. Deux lapins qui se suivent dans cette queue peuvent se reproduire (ce sont des lapins hermaphrodites). Lorsqu'il se reproduisent, il laissent la place à leur progéniture et s'enfuient. Ces lapins ont exactement un petit par portée et la couleur du petit obéit à des lois de la génétique un peu particulières. Si les deux parents sont de la même couleur, le petit sera rose, sinon il sera violet.

1. Proposer une modélisation un peu plus formelle du problème.
2. Ce manège pourra-il s'arrêter quelle que soit la configuration initiale ?
3. Si oui, les lapins peuvent-ils quand même se débrouiller pour continuer à l'infini ?
4. À quoi ressemble la queue-leu-leu à la fin ?
5. Peut on prévoir l'état final la queue-leu-leu dès le départ ?
6. Identifier les notions cachées derrière les questions précédentes.

Exercice 3. *Lemme de König*

Le lemme de König s'énonce ainsi :

Tout arbre infini à branchement fini possède une branche infinie.

1. Définir la notion d'arbre en terme de relation.
2. Formaliser les notions de branchement fini et de branche infinie.
3. Montrer le lemme de König. *Indication.* Se rappeler de l'induction bien fondée.

Exercice 4. *Mettons de l'ordre*

Soit $(E, >)$ un ordre. Donner une preuve ou un contre-exemple pour chacune des propositions :

1. Si $(E, >)$ termine alors E admet un élément minimum.
2. Si $(E, >)$ termine alors E admet un élément minimal.
3. Si $(E, >)$ termine et est total, alors E admet un élément minimum.
4. Si $(E, >)$ termine alors il existe une borne sur la longueur des suites décroissantes.
5. Si une partie F de E a un majorant (dans E), alors elle n'a pas de suite infinie croissante.
6. Si une partie F de E a un majorant (dans E), alors elle contient un élément maximum.

Exercice 5. *Lexicographique*

Soient deux ordres $(E_1, >_1)$ et $(E_2, >_2)$. L'ordre lexicographique $>_1 \times_{lex} >_2$, que l'on notera ici $\succ$, est défini sur $E_1 \times E_2$ par $(a_1, a_2) \succ (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 >_1 b_1 \vee a_1 = b_1 \wedge a_2 >_2 b_2$.

1. Montrer que si $>_1$ et $>_2$ terminent alors l'ordre lexicographique termine. Que dire si l'on sait seulement que $>_1$ ou $>_2$ termine ?
2. Définir l'ordre lexicographique sur E^n. Est-ce qu'il termine ?
3. Définir l'ordre utilisé par le dictionnaire sur E^*. Est-ce qu'il termine ?
4. Peut-on trouver un autre ordre sur E^* plus adapté à la réécriture ?

Exercice 6. *Lemme de Higman*

Soit Σ un alphabet fini. On définit sur $\Sigma^\star$ la relation d'ordre $x \leq y$ par « x est un sous-mot de y ». On se propose de montrer le résultat suivant.

Lemme. *Soit (x_i) une suite infinie de $\Sigma^\star$. Alors il existe $i < j$ tels que $x_i \leq x_j$.*

Une suite est dite *bonne* si elle vérifie la propriété du lemme, *mauvaise* sinon. Supposons qu'il existe une mauvaise suite. On construit une suite (x_i) récursivement : pour tout $i \geq 0$, on choisit un élément minimal x_i tel qu'il existe une mauvaise suite commençant par $x_0, \ldots, x_i$.

1. Montrer que cette suite est bien définie.
2. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite $(x_{\phi(i)})$ de (x_i) dont tous les éléments commencent par une même lettre $a \in \Sigma$.

On note $x'_{\phi(i)}$ le mot défini par $x_{\phi(i)} = ax'_{\phi(i)}$.

3. Conclure en raisonnant sur la suite $x_0, x_1, \ldots, x_{\phi(0)-1}, x'_{\phi(0)}, x'_{\phi(1)}, \ldots$

Exercice 7. *L'union fait la confluence*

On considère deux systèmes de réécriture $(A, \rightarrow_\alpha)$ et $(A, \rightarrow_\beta)$ sur un même ensemble tels que :
- $\rightarrow_\alpha$ vérifie la propriété du diamant,
- $\rightarrow_\beta$ est confluent,
- ${}_\alpha\!\leftarrow \cdot \rightarrow_\beta \subseteq \leftrightarrow_\beta^* \cdot {}_\alpha\!\leftarrow$.

1. Traduire chacune des propriété sous forme de diagramme.
2. Montrer que l'union de $\rightarrow_\alpha$ et $\rightarrow_\beta$ (que l'on notera $\rightarrow$) forme un système confluent.
   Indication. On pourra montrer que ${}_\alpha\!\leftarrow \cdot \rightarrow_\beta \subseteq \rightarrow_\beta^* \cdot {}^*\!\leftarrow_\beta \cdot \leftarrow_\alpha$, puis faire la preuve par récurrence en utilisant un ordre bien fondé.