Représentation et algorithmique des ensembles semi-linéaires

Jérémie CHALOPIN

Stage réalisé au LSV - ENS CACHAN
sous la direction d'Alain FINKEL
en collaboration avec Fabrice CHEVALIER

Calcul des états accessibles d'un système

S_0 : ensemble d'états initiaux
$succ$: une fonction successeur

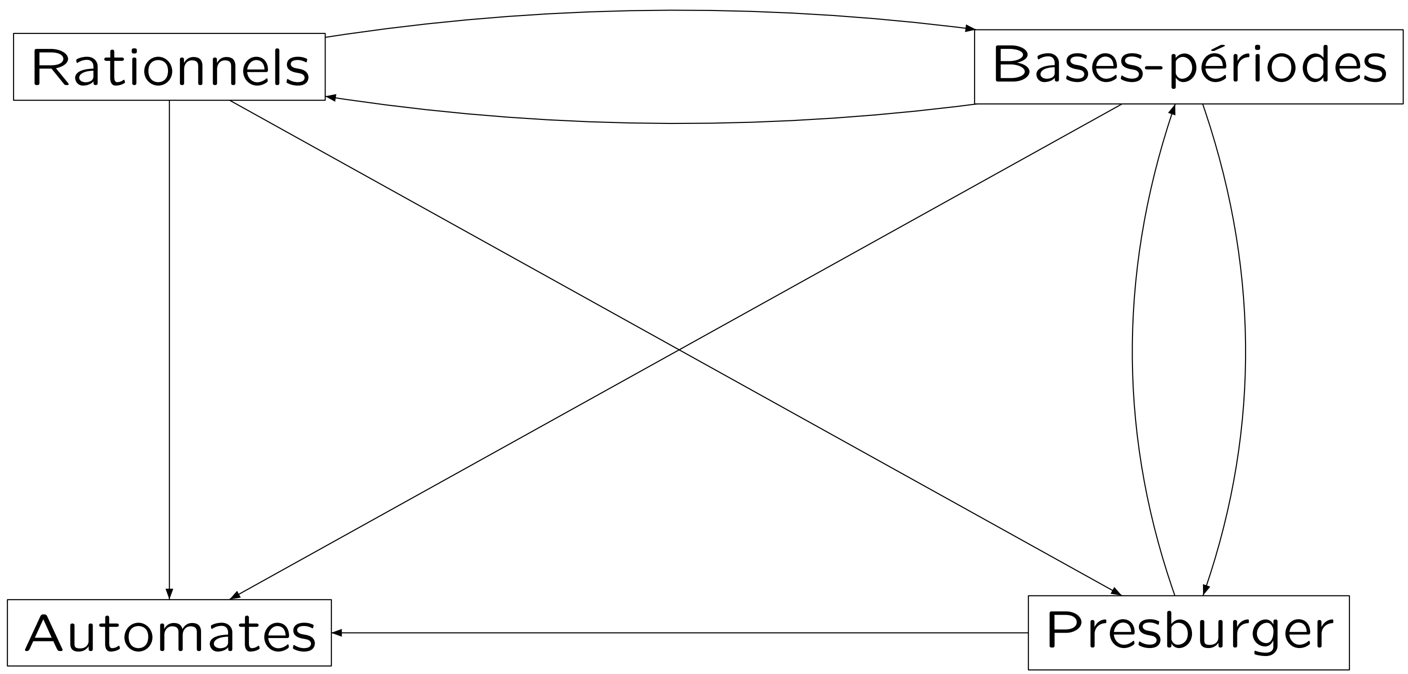
Faire

$S' \leftarrow S$

$S \leftarrow S \cup succ(S)$

tant que $\neg(S \subseteq S')$

Renvoyer S



Opérations : $\cup$, $\cap$, $+$, $\complement$, $*$, ϕ, ϕ^{-1}

Ensembles semi-linéaires

1. Bases et périodes
2. Expressions rationnelles
3. Formules de Presburger
4. Automates

Bases et périodes

Définition :

Ensemble linéaire de $\mathbb{N}^k$ *:*

$L = u + U^* = \{u + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \ ; \ \lambda_i \in \mathbb{N}\}$ *où* $U = \{u_1, \ \ldots \ , u_n\}$

u *est appelé base de* L *et* U *l'ensemble de ses périodes.*

Ensemble semi-linéaire : union finie de parties linéaires.

Exemples :

- $0 + 2^*$ est un ensemble linéaire de $\mathbb{N}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ x \geq 1\}$ est un ensemble linéaire de $\mathbb{N}^2$
- $\{2^n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas un ensemble semi-linéaire de $\mathbb{N}$

Proposition : *Les ensembles semi-linéaires sont stables par union, somme, étoile, morphisme.*

Stabilité par somme :

$$\bigcup_i (u_i+U_i^*)+\bigcup_j (v_j+V_j^*) = \bigcup_{i,j} (u_i+v_j+U_i^*+V_j^*) = \bigcup_{i,j} (u_i+v_j+(U_i \cup V_j)^*)$$

Stabilité par étoile :

$$(\bigcup_{i=1}^{n} (u_i + U_i^*))^* = \sum_{i=1}^{n} (u_i + U_i^*)^* = \sum_{i=1}^{n} \{0\} \cup (u_i + (\{u_i\} \cup U_i)^*)$$

Ensembles semi-linéaires et ensembles rationnels

Définition :
L'ensemble des parties rationnelles de $\mathbb{N}^k$ *est le plus petit sous-ensemble de parties de* $\mathbb{N}^k$ *contenant les parties finies et stable par union, somme et étoile.*

Exemple : $1+2^*$ et $(1+2^*)^*$ sont des expressions rationnelles.

Proposition :
Les ensembles semi-linéaires sont les ensembles rationnels.

Proposition : *Soit* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m} \in \mathbb{N}^k$ *, et soit* S *l'ensemble des solutions* $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ *de l'équation*

$$\overrightarrow{u} + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{v} + \sum_{j=1}^{m} y_j \overrightarrow{v_j}$$

Alors S *est semi-linéaire.*

Théorème : *Les ensembles semi-linéaires sont clos par intersection.*

Démonstration de la stabilité par intersection

Soient $U = \overrightarrow{u} + \{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}^*$ et $V = \overrightarrow{v} + \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m}\}^*$.

$S = \{(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) / \overrightarrow{u} + \sum\limits_i x_i \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{v} + \sum\limits_j y_j \overrightarrow{v_j}\}$

f définie par $f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = \overrightarrow{u} + \sum x_i \overrightarrow{u_i}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{w} \in f(S) &\iff \exists (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \in S; \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \\
&\iff \exists (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \in S; \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \Sigma_{i=1}^n x_i \overrightarrow{u_i} \\
&\iff \exists (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m); \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \Sigma_{i=1}^n x_i \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{v} + \Sigma_{j=1}^m y_j \overrightarrow{v_j} \\
&\iff \overrightarrow{w} \in U \cap V
\end{aligned}$$

Formules de Presburger

Définition :
Ensemble $\mathcal{P}$ des formules de Presburger :

- Si $a_i, a'_i \geq 0,\ P(x_1, ..., x_n)$: $a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a'_0 + \sum_{i=1}^{n} a'_i x_i$ est une formule de $\mathcal{P}$.

- Si P_1 et P_2 sont dans $\mathcal{P}$, alors $P_1 \wedge P_2$, $P_1 \vee P_2$, $\neg P_1$, $\exists x\ P_1$ sont dans $\mathcal{P}$.

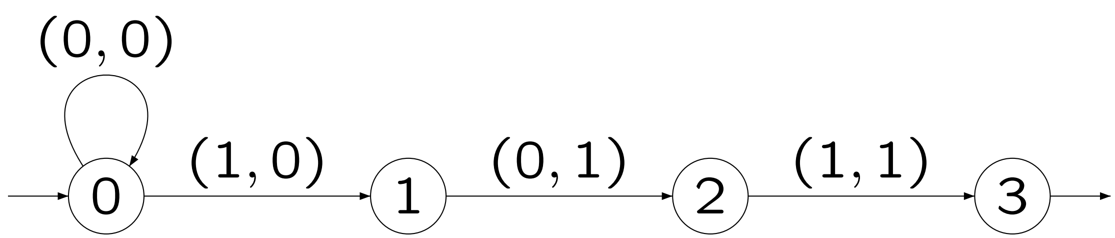
Exemple : $P(x, y) : x = 2y$ et $P(x) : \exists y\ x = 2y$ sont des formules de $\mathcal{P}$.
Théorème : *Les ensembles de Presburger sont les ensembles semi-linéaires.*

Semi-linéaires et automates

$\overrightarrow{x} \in \mathbb{N}^k \mapsto$ mot sur $\{0,1\}^k$

Exemple : $(5,3) \mapsto (101, 011) \mapsto (1,0)(0,1)(1,1)$

Automate reconnaissant $(5,3)$ **:**



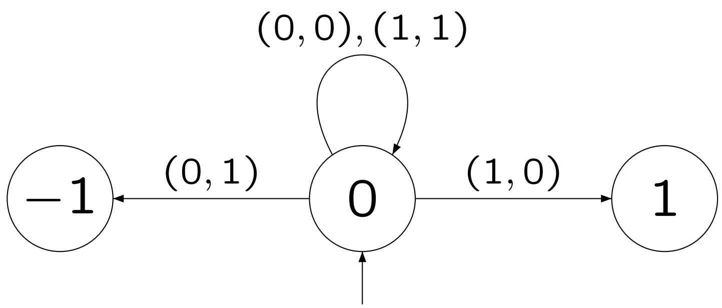
Vecteur à une composante

$$\overset{\overrightarrow{x'}}{\boxed{\overset{\overrightarrow{x}}{\boxed{\begin{matrix}1 & 0\end{matrix}}}\quad\overset{\overrightarrow{b}}{\boxed{1}}}}\qquad\qquad \overrightarrow{x'}=2\overrightarrow{x}+\overrightarrow{b}$$

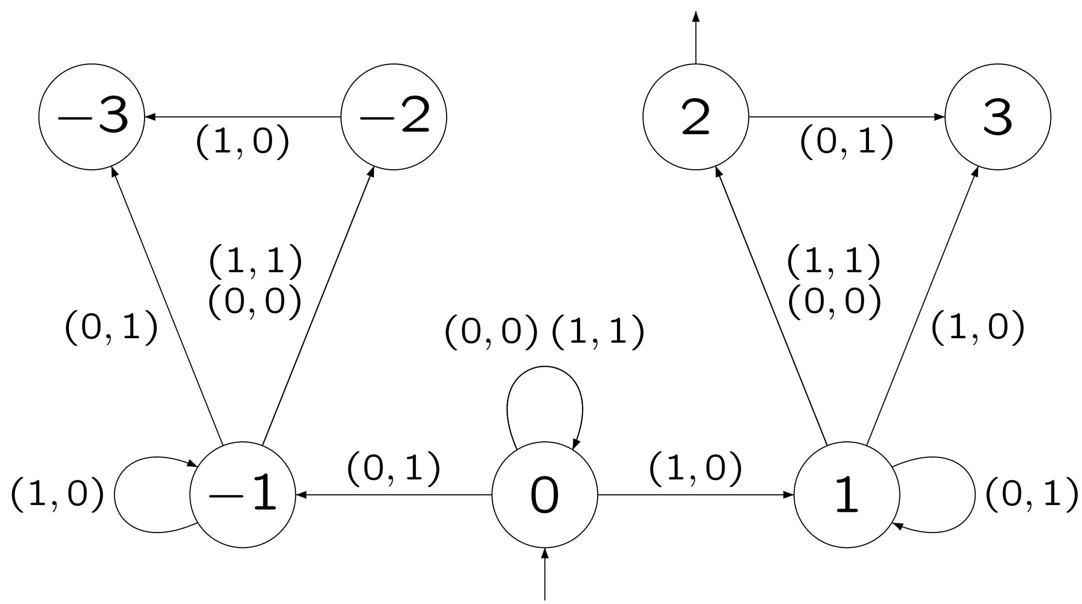
Vecteur à deux composantes

$$\overset{\overrightarrow{x'}}{\boxed{\overset{\overrightarrow{x}}{\boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}}}\quad\overset{\overrightarrow{b}}{\boxed{\begin{matrix}1\\ 1\end{matrix}}}}}\qquad\qquad \overrightarrow{x'}=2\overrightarrow{x}+\overrightarrow{b}$$

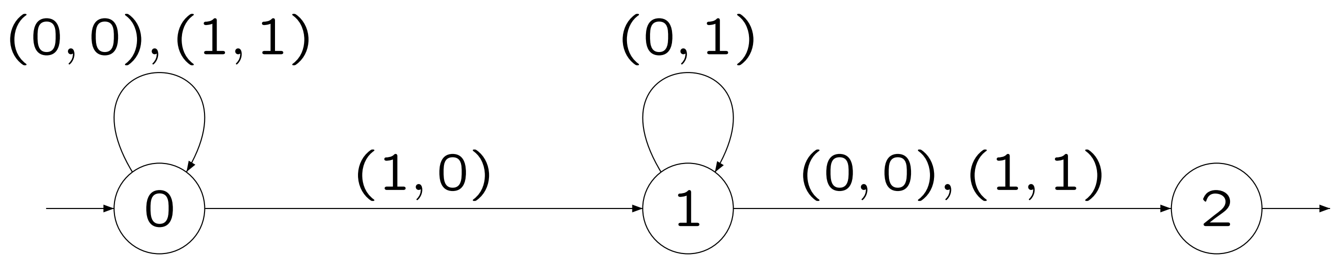
Automate pour l'équation $x - y = c$



Automate pour l'équation $x - y = 2$



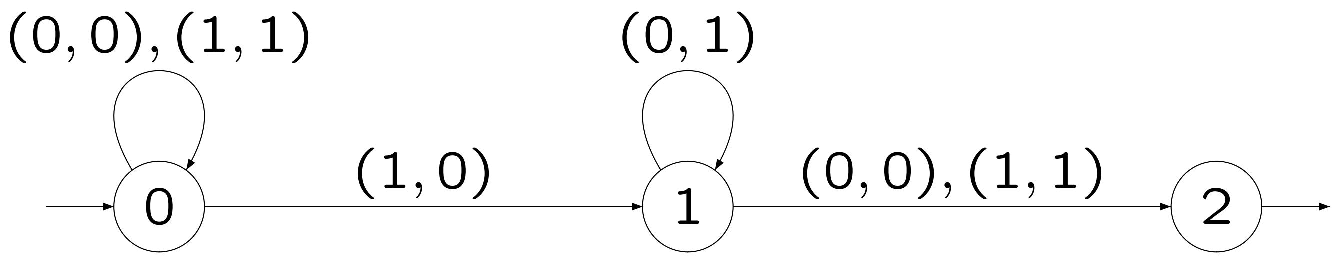
Automate pour l'équation $x - y = 2$



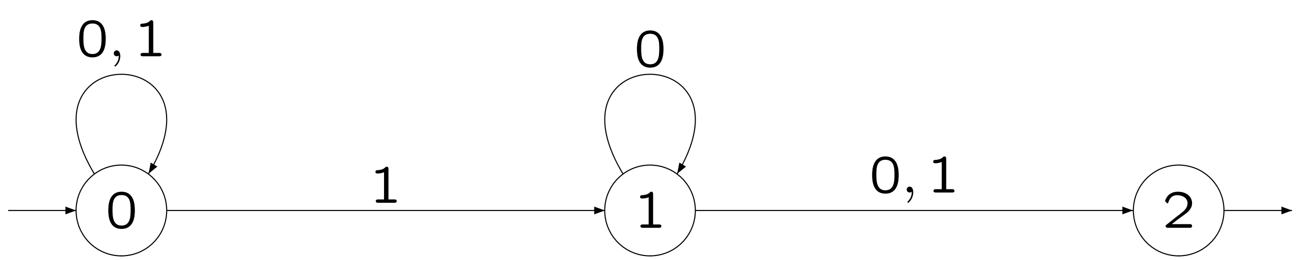
Automate pour une formule de Presburger

- $\mathcal{A}_{\phi_1 \wedge \phi_2} = \mathcal{A}_{\phi_1} \cap \mathcal{A}_{\phi_2}$
- $\mathcal{A}_{\phi_1 \vee \phi_2} = \mathcal{A}_{\phi_1} \cup \mathcal{A}_{\phi_2}$
- $\mathcal{A}_{\neg\phi} = \neg\mathcal{A}_{\phi}$
- $\mathcal{A}_{\exists x \ \phi} =$ automate projection

Projection d'un automate

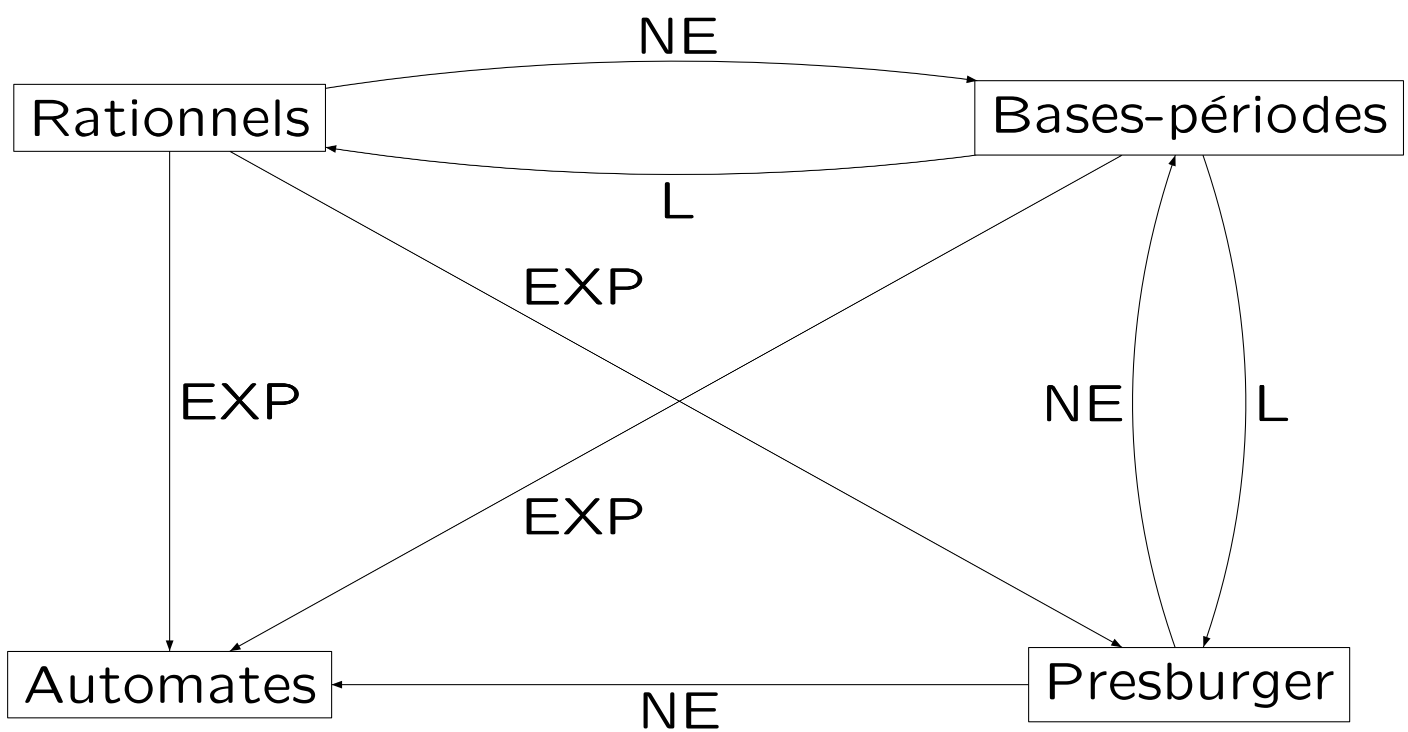


Automate pour la formule $x - y = 2$



Automate pour la formule $\exists y \;\; x - y = 2$

Représentation	$\bigcup$	$\bigcap$	Compl.	$+$	$*$	Test $\emptyset$	$\subseteq$
Rationnels	L	NE	NE	L	L	L	2-EXP
Bases-périodes	L	EXP	NE	P	EXP	L	2-EXP
Presburger	L	L	L	L	NE	3-EXP	3-EXP
Automates	L	P	EXP/L	L	?	L	EXP/P


NE
Rationnels
Bases-périodes
L
EXP
EXP
NE
L
EXP
Automates
Presburger
NE