Élection et énumération par calculs locaux

Jérémie CHALOPIN

7 juillet 2003

Stage réalisé avec Yves MÉTIVIER

LABRI - Université Bordeaux I

Systèmes Distribués

But : Gérer la coexistence de différents processus ;

Difficulté : Pas de coordination centralisée ;

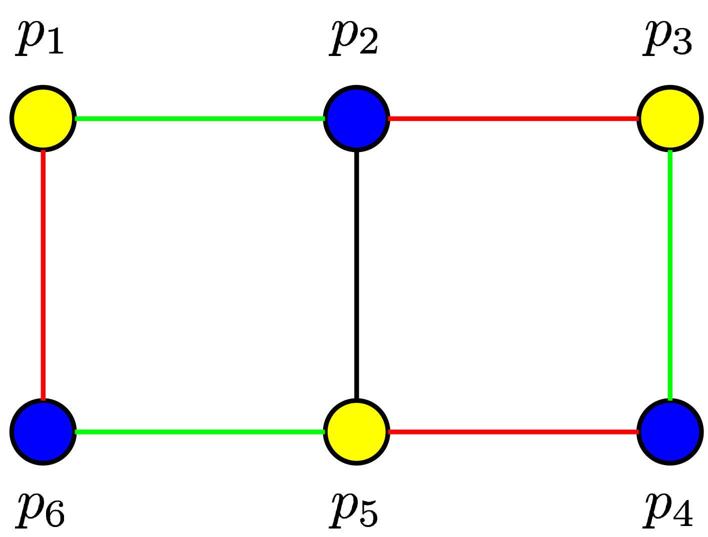
Connaissances initiales possibles :

- taille du réseau, diamètre du réseau,
- topologie du réseau,
- identifiants,
- . . .

Modèle

Un réseau est modélisé par un graphe simple étiqueté où on représente :

- les processus par les sommets,
- les liens de communication par les arêtes,
- les états des processus par les étiquettes des sommets,
- les propriétés des liens par des étiquettes sur les arêtes.



Les calculs locaux

Un algorithme distribué est codée par un système $\mathcal{R}$ de règles :

- de réétiquetage,
- locales,
- localement engendrées.

Un pas de calcul correspond à l'application d'une règle de réétiquetage :

$$(G, \lambda)\mathcal{R}(G, \lambda')$$

Motivations

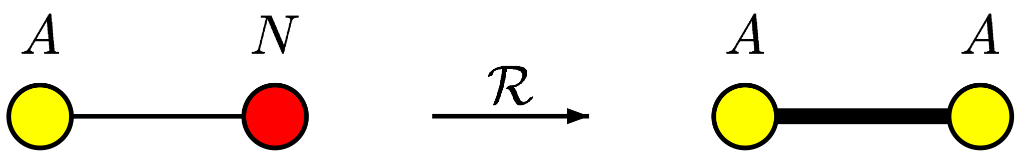
- Déterminer ce qui est réalisable et sous quelles conditions,
- Déterminer quelles connaissances sont nécessaires,
- Prouver la correction d'algorithmes distribués,

Modélisation à partir de systèmes de réétiquetage de graphes

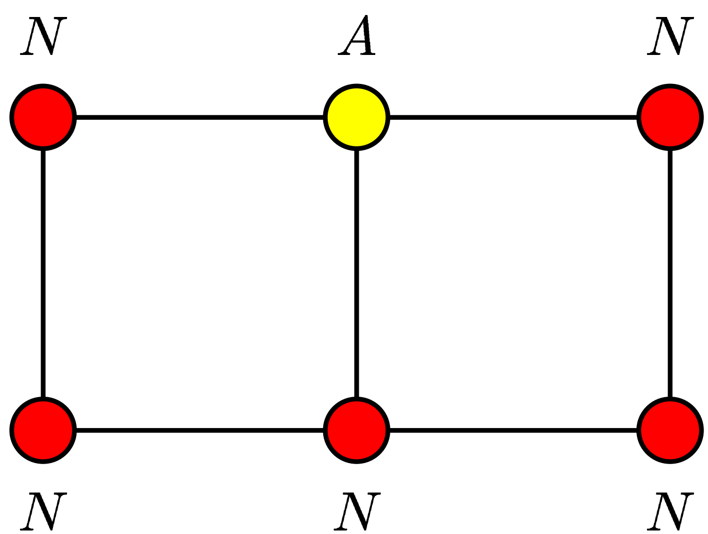
- Modèle abstrait de communication,
- Résultats d'impossibilité vrais dans des modèles plus faibles,
- Implémentation à partir d'algorithmes probabilistes,
- Propriétés connues sur les graphes.

Calculs locaux sur les arêtes

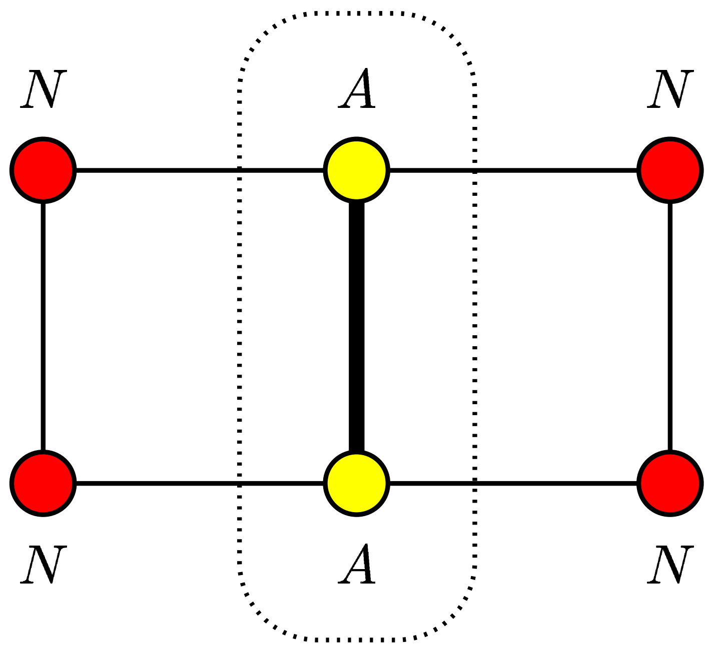
À chaque pas de calcul, on modifie les étiquettes d'une arête et de ses extrémités.



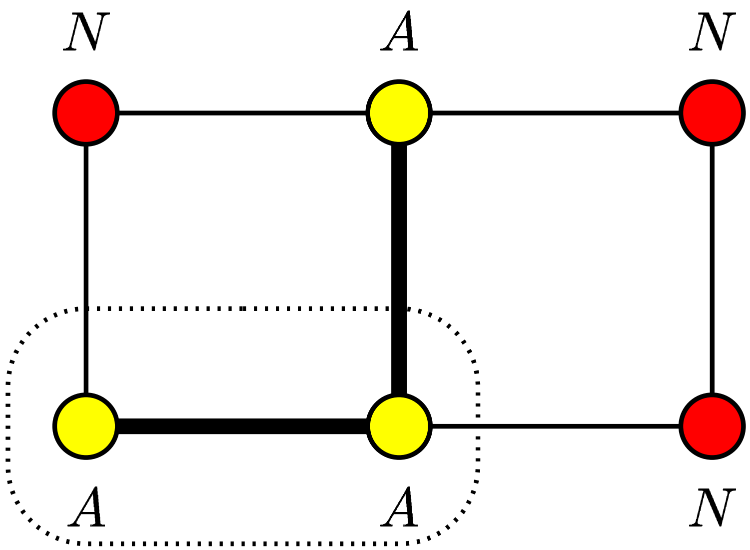
Calcul d’un arbre couvrant



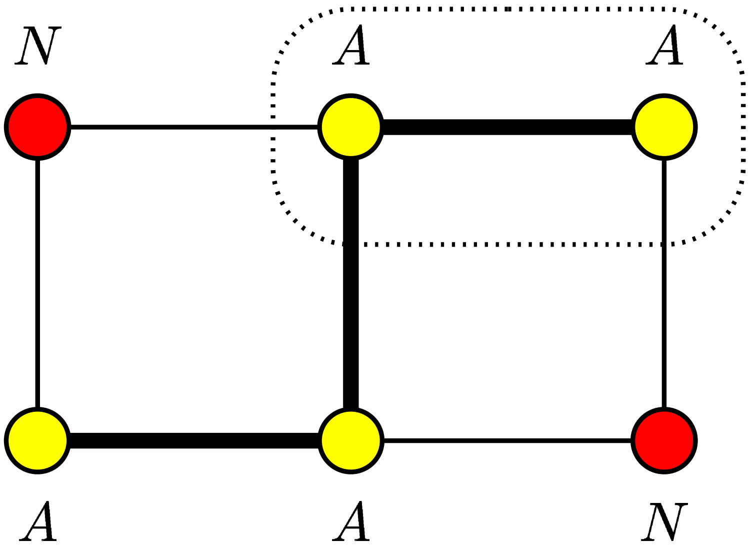
Calcul d'un arbre couvrant



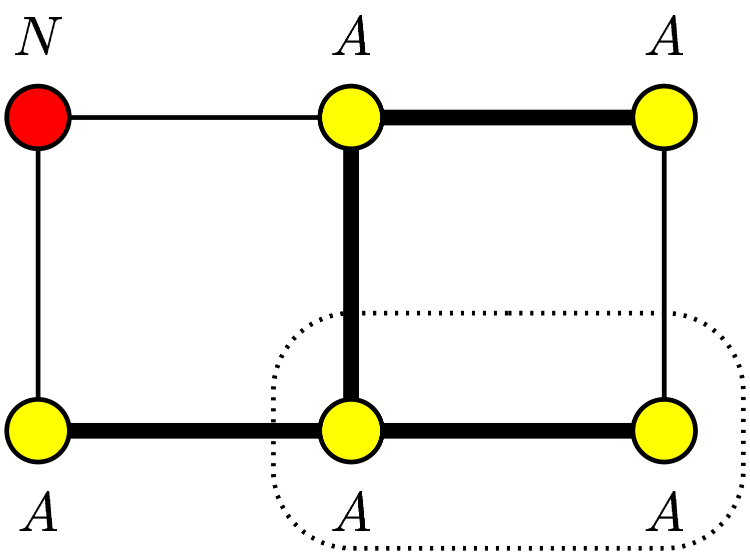
Calcul d'un arbre couvrant



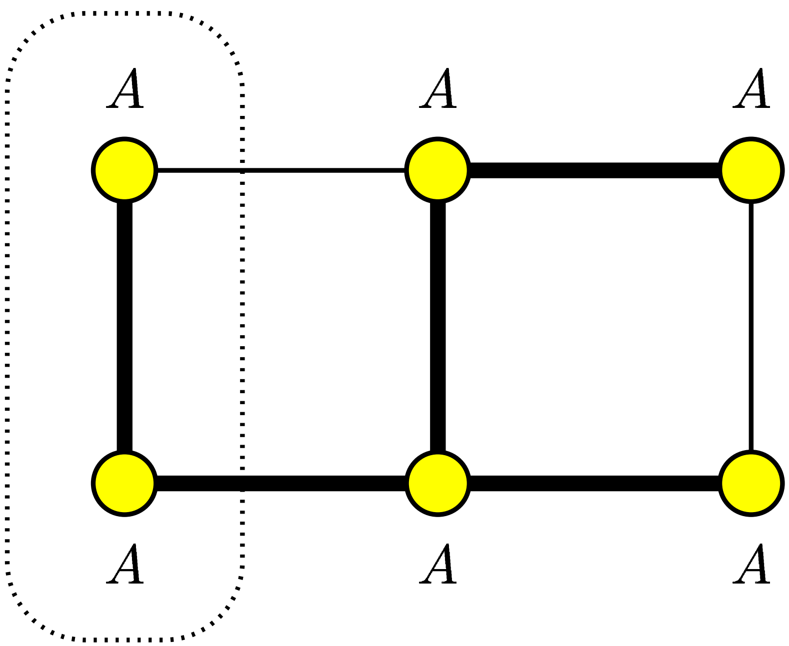
Calcul d'un arbre couvrant



Calcul d'un arbre couvrant

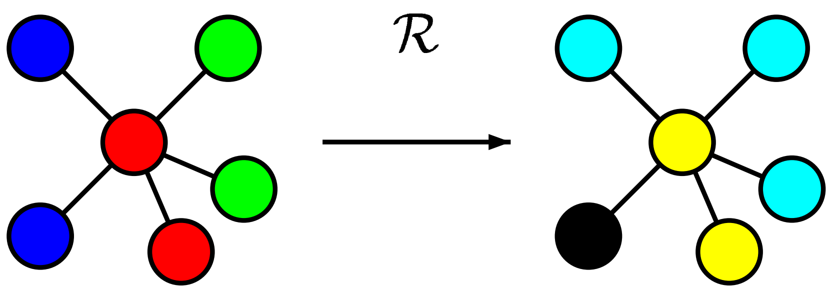


Calcul d’un arbre couvrant



Calculs locaux sur les boules

À chaque pas de calcul, on modifie l'étiquetage d'une boule de rayon 1.



Problèmes

Élection

Configuration initiale : quelconque,

Configuration finale : un sommet porte l'étiquette *ÉLU* et tous les autres l'étiquette *NON-ÉLU*.

Les étiquettes *ÉLU* et *NON-ÉLU* sont finales.

Énumération

Configuration initiale : quelconque,

Configuration finale : tous les sommets portent un numéro unique compris entre 1 et la taille du graphe.

Résultat connu

Théorème :

Il existe un algorithme d'élection utilisant des calculs locaux **sur les boules** pour un graphe simple G

$$\Longleftrightarrow$$

G est un graphe $\mathcal{S}$**-minimal**.

Condition nécessaire : Lemme de relèvement d'Angluin (1980)

Condition suffisante : Algorithme de Mazurkiewicz (1997)

Nouveau résultat

Théorème :

Il existe un algorithme d'élection utilisant des calculs locaux
sur les arêtes pour un graphe G

$$\Longleftrightarrow$$

G est un graphe **minimal**.

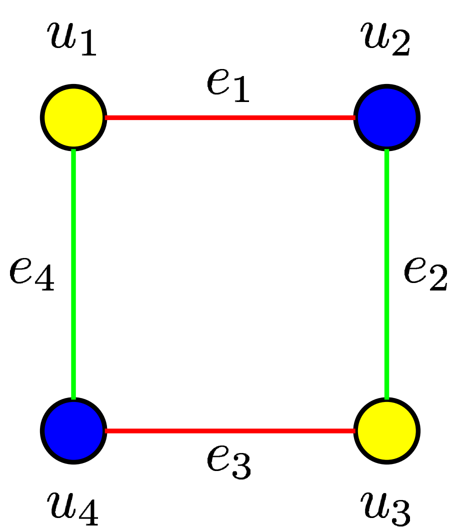
S'interdire d'étiqueter les arêtes donne un modèle de calcul strictement moins puissant que lorsqu'on s'y autorise.

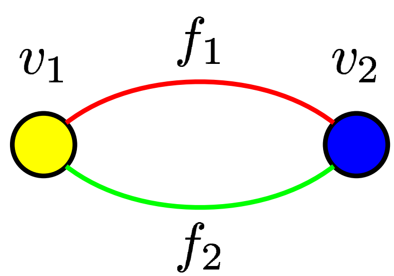
Graphes

Graphes connexes sans boucle avec des arêtes multiples.

Un graphe étiqueté est noté (G, λ) où

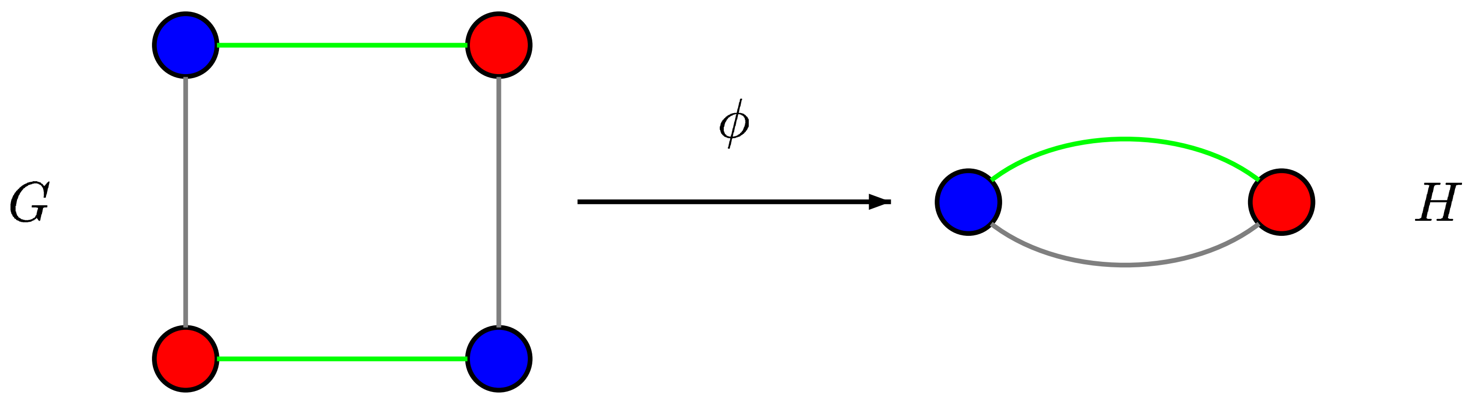
- $G = (V(G), E(G))$ est un graphe non-étiqueté,
- $\lambda : V(G) \cup E(G) \longrightarrow L$ où L est un ensemble d'étiquettes.





Revêtements

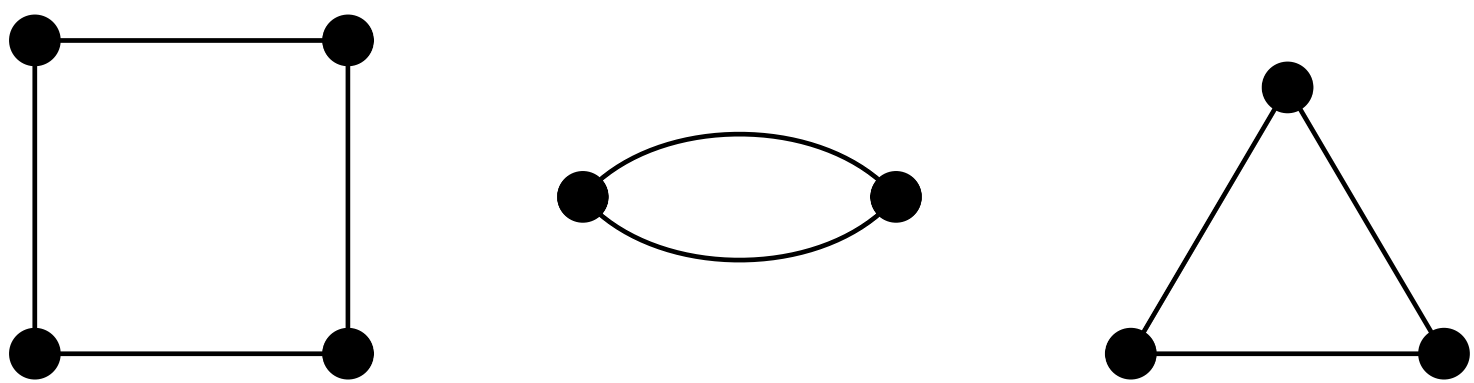
Définition : G est un revêtement de H à travers ϕ si ϕ est un morphisme surjectif tel que pour tout $u \in V(G)$, ϕ induit une bijection entre les arêtes incidentes à u et celles incidentes à $\phi(u)$.



Graphes minimaux et $\mathcal{S}$-minimaux

Un graphe G est minimal si pour tout graphe H dont G est revêtement, G est isomorphe à H.

Un graphe simple G est $\mathcal{S}$-minimal si pour tout graphe simple H dont G est revêtement, G est isomorphe à H.

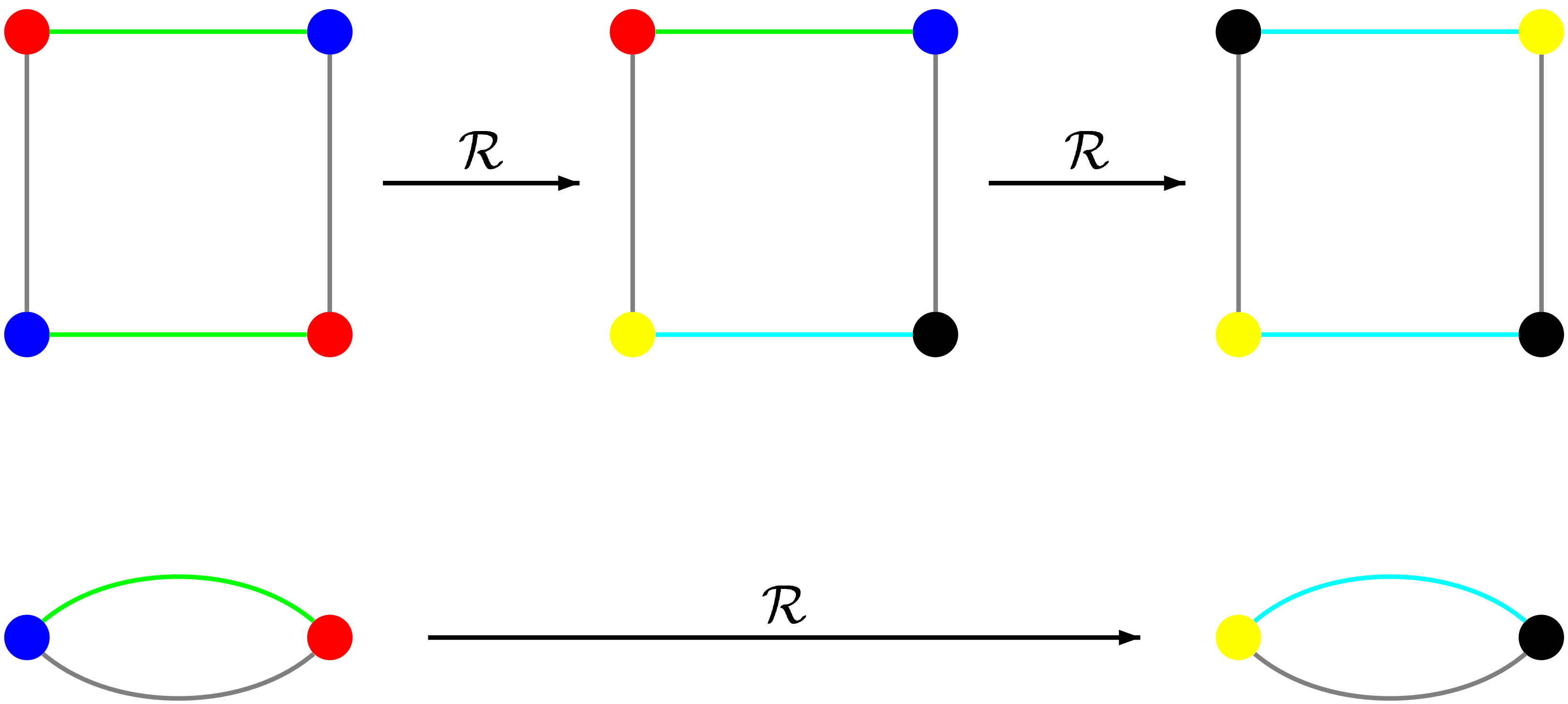


Condition nécessaire : lemme de relèvement (Angluin)

$$
\begin{tikzcd}
(G, \lambda) \arrow[r, "\mathcal{R}^*"] \arrow[d, "\phi"] & (G, \lambda') \arrow[d, "\phi"] \\
(H, \eta) \arrow[r, "\mathcal{R}"] & (H, \eta')
\end{tikzcd}
$$

Corollaire : Il est impossible d'élire dans un graphe non-minimal avec des calculs locaux sur les arêtes.

Simulation



Algorithme d’énumération

- Chaque noeud prend un numéro et le diffuse,
- Si un noeud découvre qu’un autre sommet porte le même numéro :
  - Il compare les informations sur les voisinages,
  - S’il a un voisinage plus faible, il change de numéro et le diffuse.

Étiquettes

Étiquettes des arêtes : $(p, \{n_1, n_2\})$; initialement, $(0, \{0, 0\})$

– p : numéro de l'arête,

– $\{n_1, n_2\}$: numéros des sommets incidents à l'arête.

Étiquettes des sommets : $(n(v), N(v), M(v))$; initialement, $(0, \emptyset, \emptyset)$

– $n(v)$: numéro de v ;

– $N(v)$: voisinage de v, ensemble de couples (p, n) où

  – p est le numéro d'une arête e incidente à v,

  – n est le numéro de l'autre extrémité de e ;

– $M(v)$: Boîte aux lettres de v, ensemble d'éléments (n, N).

Règles de réétiquetage

1. Baptême d'une arête,
2. Diffusion,
3. Voisinage non maximal,
4. Voisins identiques,
5. Échange de numéros.

Conclusion

Résultat :

Caractérisation des graphes où on peut élire en utilisant des calculs locaux sur les arêtes.

Perspectives :

– Étendre des résultats connus pour les calculs locaux sur les boules aux calculs locaux sur les arêtes,

– Considérer des modèles plus faibles.