Mémoire de DEA

Élection et énumération par calculs locaux

Jérémie CHALOPIN

Mars - Juillet 2003

réalisé au LABRI - Université Bordeaux I
sous la direction d'Yves MÉTIVIER

1 Introduction

Dans ce travail, on s'intéresse à deux problèmes d'algorithmique distribuée : l'élection et l'énumération. Des résultats sont connus lorsqu'un noeud du réseau peut en un pas de calcul modifier son état et l'état de tous ses voisins. On caractérise ici quels sont les graphes dans lesquels on peut résoudre ces problèmes lorsqu'en un pas de calcul deux sommets voisins se synchronisent, s'informent de leurs états respectifs et changent d'état. Pour obtenir ce résultat, on utilise les revêtements de graphes et l'algorithme d'énumération de Mazurkiewicz.

1.1 Le modèle

On modélise les réseaux par des graphes étiquetés simples, non-orientés et sans boucle où les sommets représentent les processeurs et les arêtes représentent les liens de communication. Les étiquettes des sommets codent les états des processeurs et peuvent contenir des informations sur le réseau : taille ou diamètre du réseau, topologie du graphe, étiquettes présentes dans le réseau, etc.

Les algorithmes distribués sont décrits par des systèmes de règles de réétiquetage qui sont des outils utiles pour prouver la correction de ces algorithmes et comprendre la puissance de calcul des différents modèles. Les règles de réétiquetage sont des règles de réécriture sur les graphes qui doivent vérifier les propriétés suivantes :

1. Elles ne modifient pas la topologie du graphe, mais modifie les étiquettes des sommets et/ou des arêtes,
2. Elles sont *locales* : chaque application d'une règle de réétiquetage ne modifie que l'étiquetage d'un sous-graphe connexe de taille fixée,
3. Elles sont *localement engendrées* : la condition d'application d'une règle dépend seulement de l'étiquetage du sous-graphe réétiqueté.

L'application d'une règle de réétiquetage correspond à un pas de calcul élémentaire. L'évolution de la configuration du réseau se fait de manière asynchrone et on remarque que plusieurs pas de calcul peuvent s'effectuer simultanément si les graphes réétiquetés sont disjoints. Les calculs locaux sont les calculs correspondant à des règles de réétiquetage vérifiant les conditions cidessus.

Nous allons nous intéresser à deux types de calculs locaux : les calculs locaux sur les boules où les graphes réétiquetés, à chaque pas de calcul, sont des boules de rayon 1 et les calculs locaux sur les arêtes où, à chaque pas de calcul, une arête et ses extrémités sont réétiquetées. Le modèle utilisant des calculs locaux sur les arêtes est moins puissant que le modèle utilisant des calculs locaux sur les boules, et il est intéressant de savoir quelles propriétés calculables dans le modèle le plus puissant restent calculables dans l'autre modèle et sous quelles conditions.

Les calculs locaux sur les arêtes sont proches du modèle proposé par D. Angluin [Ang80], mais ici, un noeud ne peut pas initialement distinguer ses voisins et ne connaît pas forcément son degré. Par ailleurs, dans le modèle d'Angluin, si deux sommets voisins sont dans le même état et qu'on effectue un pas de calcul sur l'arête les reliant, les deux noeuds sont encore dans le même état après la transformation.

1.2 Deux problèmes

Le problème de l'élection est un problème important en algorithmique distribuée. Étant donné un réseau de processeurs, le problème de l'élection est d'arriver dans une configuration où exactement un processeur a l'étiquette *ÉLU* et où tous les autres processeurs ont l'étiquette *NON-ÉLU*. Le processeur élu peut ensuite être utilisé pour prendre des décisions, diffuser ou transmettre des informations.

Le problème de l'énumération consiste à attribuer à chaque noeud du réseau un numéro unique compris entre 1 et la taille du réseau. Une fois un numéro unique attribuée à chaque noeud, des méthodes existantes pour les graphes disposant d'identifiants uniques peuvent être utilisées pour résoudre certains problèmes. Ce problème est lié à celui de l'élection, puisque si on sait énumérer et détecter que le calcul est fini, on peut alors choisir d'élire le sommet portant le numéro 1.

1.3 Résultat principal

On sait caractériser les graphes et les familles de graphes dans lesquels on peut résoudre ces deux problèmes lorsqu'on utilise des calculs locaux sur les boules [Maz97, GM02, God02]. On caractérise ici les graphes dans lesquels on peut résoudre ces problèmes en utilisant des calculs locaux sur les arêtes (théorème 6.12).

1.4 Outils

Revêtements et calculs locaux On utilise la notion de revêtement afin de pouvoir décrire quels sont les graphes sur lesquels il est impossible de résoudre les problèmes de l'élection et de l'énumération en utilisant des calculs locaux.

Un graphe G est un revêtement d'un graphe H s'il existe un morphisme surjectif de G sur H qui est localement bijectif ; si G et H ne sont pas isomorphes, on dit que le revêtement est propre. Un graphe G est minimal si G n'est revêtement propre d'aucun graphe et un graphe simple G' est $\mathcal{S}$-minimal si G' n'est revêtement propre d'aucun graphe simple.

L'idée des preuves d'impossibilité introduite par D. Angluin [Ang80] est la suivante : si G et H sont deux graphes tels que G soit un revêtement propre de H (i.e. G n'est pas un graphe minimal), toute exécution d'un algorithme sur H utilisant des calculs locaux sur les arêtes induit une exécution du même algorithme sur G et chaque étiquette apparaissant dans H apparaît au moins deux fois dans G. On peut alors montrer l'impossibilité de résoudre les problèmes de l'élection ou de l'énumération dans G en utilisant des calculs locaux sur les arêtes. Si de plus, H est un graphe simple, on obtient le même résultat pour les calculs locaux sur les boules.

L'algorithme de Mazurkiewicz Dans [Maz97], A. Mazurkiewicz présente un algorithme qui utilise des calculs locaux sur les boules et qui permet de résoudre les problèmes de l'énumération et de l'élection sur les familles de graphes dont tous les éléments sont des graphes $\mathcal{S}$-minimaux. On s'inspire de l'algorithme de Mazurkiewicz pour montrer qu'on peut résoudre le problème de l'énumération sur les graphes minimaux en utilisant des calculs locaux sur les arêtes et en s'autorisant désormais à marquer les arêtes.

1.5 Plan

Dans la partie 2, on rappelle les définitions des graphes et des revêtements. Dans la partie 3, on présente les définitions des calculs locaux et leurs relations avec les revêtements. Dans la partie 4, on décrit les problèmes de l'élection et de l'énumération, on montre qu'ils sont équivalents sous certaines conditions et qu'il est impossible de les résoudre pour les graphes qui ne sont pas minimaux (resp. $\mathcal{S}$-minimaux) en utilisant des calculs locaux sur les arêtes (resp. sur les boules). Dans la partie 5, on présente l'algorithme de Mazurkiewicz et dans la partie 6, on présente un algorithme utilisant des calculs locaux sur les arêtes qui permet de résoudre les problèmes de l'énumération et de l'élection sur les graphes minimaux.

Table des matières

1 Introduction **1**
1.1 Le modèle 1
1.2 Deux problèmes 2
1.3 Résultat principal 2
1.4 Outils 2
1.5 Plan 3

2 Graphes **5**
2.1 Définitions 5
2.2 Graphes étiquetés 6
2.3 Revêtements 7

3 Les calculs locaux **9**
3.1 Définitions 10
3.2 Réétiquetage sur une boule 11
3.3 Réétiquetage sur les arêtes 11
3.4 Calculs locaux et revêtements 12

4 Élection et énumération **13**
4.1 Les réseaux anonymes 13
4.2 Définitions 14
4.3 Équivalence entre élection et énumération 14
4.3.1 Élire lorsqu'on sait énumérer 15
4.3.2 Énumérer dans un graphe où un sommet est distingué . . . 15
4.3.3 Calcul d'un arbre couvrant 15
4.3.4 Énumération 16
4.3.5 Détection de la terminaison 21
4.4 Résultats d'impossibilité 25

5 L'algorithme de Mazurkiewicz **25**
5.1 Présentation 25
5.2 Les étiquettes 26
5.3 Relation d'ordre sur les vues locales 26
5.4 Les règles de réétiquetage 26
5.5 Propriétés 27

6 Un algorithme adapté aux calculs locaux sur les arêtes **31**
6.1 Présentation 32
6.2 Les étiquettes 32
6.3 Relation d'ordre sur les voisinages 32
6.4 Les règles de réétiquetage 33
6.5 Propriétés 35
6.6 Comparaison avec le modèle d'Angluin 41
6.7 Est-il important de marquer les arêtes ? 42

7 Conclusion **44**
7.1 Résultats 44
7.2 Perspectives 44

2 Graphes

2.1 Définitions

On considère des graphes non-orientés sans boucle dans lesquels les arêtes multiples sont autorisées. On ne peut donc pas simplement dire que $E(G)$ est une partie des ensembles à deux éléments de $V(G)$ et c'est pourquoi on se donne une fonction qui à toute arête associe ses extrémités qui doivent être distinctes. Les notations utilisées ici sont standards [Bon95, Ros00].

Définition 2.1 *Un graphe G est défini par un ensemble non vide $V(G)$ de sommets ou noeuds, un ensemble $E(G)$ d'arêtes et une fonction d'incidence ext qui à toute arête e associe deux sommets distincts, appelés ses extrémités. On note le graphe $G = (V(G), E(G), ext)$.*

Étant donnée une arête $e \in E(G)$, on note $ext(e) = \{u, v\}$; on dit que l'arête e est incidente aux sommets u et v et que les sommets u et v sont adjacents (ou voisins) et reliés par l'arête e.

Pour tout sommet $u \in V(G)$, on note $I_G(u)$ l'ensemble des arêtes incidentes au sommet u et $N_G(u)$ l'ensemble des sommets voisins de u dans G. La boule de centre u dans G, notée $B_G(u)$, est le graphe constitué des sommets $\{u\} \cup N_G(u)$ et des arêtes incidentes à u.

Un graphe est dit simple lorsqu'il y a au plus une arête entre deux sommets et $E(G)$ peut alors être défini comme un ensemble de paires d'éléments de $V(G)$.

Remarque : Si G est un graphe simple, pour tout sommet u, $I_G(u)$ et $N_G(u)$ sont en bijection.

Définition 2.2 *Pour tout graphe G, le degré d'un sommet $v \in V(G)$, noté $\deg_G(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v : $\deg_G(v) = |I_G(v)|$. En particulier, si G est un graphe simple, alors pour tout sommet $v \in V(G)$, le degré de v est son nombre de voisins : $\deg_G(v) = |N_G(v)|$.*

Définition 2.3 *On dit qu'un graphe H est un sous-graphe partiel d'un graphe G si $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ et toute arête $f \in E(H)$ a ses extrémités dans $V(G)$.*

Un graphe H est un sous-graphe induit de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H)$ est l'ensemble des arêtes de G dont les extrémités sont dans $V(H)$.

Définition 2.4 *Étant donnés deux sommets u, v dans un graphe G, un chemin Γ dans un graphe G allant de u à v est une suite alternée $(u_0 = u, e_1, u_1, e_2, \ldots, e_n, u_n = v)$ où $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont des sommets du graphe et les e_i sont des arêtes de G dont les extrémités sont u_{i-1} et u_i. Les sommets u_0 et u_n sont les extrémités du chemin Γ et les sommets $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont les sommets internes du chemin ; la longueur n du chemin est son nombre d'arêtes.*

Un chemin dont toutes les arêtes sont distinctes est dit simple et un chemin qui ne contient pas deux fois le même sommet est dit élémentaire.

Lorsque les extrémités d'un chemin simple Γ sont confondues, on dit que Γ est un cycle. On parle de cycle élémentaire lorsque tous les sommets internes du cycle sont distincts.

Définition 2.5 *Un graphe G est connexe si pour tous sommets $u, v \in V(G)$, on peut trouver un chemin allant de u à v.*

Définition 2.6 *Un arbre est un graphe connexe sans cycle.*

Étant donné un graphe connexe G, un arbre couvrant de G est un arbre A tel que $V(G) = V(A)$ et $E(A) \subseteq E(G)$.

Remarque : Pour tout arbre A et pour tous sommets $u, v \in V(A)$, il existe un unique chemin simple dans A allant de u à v que l'on note $\Gamma^A_{u,v}$.

Définition 2.7 *Un arbre enraciné est un arbre A dans lequel un sommet r est distingué : r est appelé la racine de l'arbre.*

Soit A un arbre enraciné dont on note r la racine, étant donné un sommet $u \in V(A)$, soit $\Gamma_{u,r} = (u = u_0, e_1, u_1, e_1, \ldots, e_n, u_n = r)$ l'unique chemin reliant u à r, on dit que u est un fils du sommet u_1 et que u_1 est le père de u.

Pour tous noeuds u, v, s'il existe une suite de sommets $(u_0 = u, u_1, \ldots, u_n = v)$ telle que pour tout $i \geq 1$, u_i soit le père de u_{i-1}, on dit que u est un descendant de v et que v est un ancêtre de u.

En particulier, pour tout arbre enraciné A dont la racine est notée r, tous les autres sommets de l'arbre sont des descendants de r.

Définition 2.8 *Étant donnés deux sommets u et v d'un graphe G, on appelle distance de u à v, la longueur du plus court chemin allant de u à v et on la note $dist_G(u, v)$.*

Le diamètre de G est la plus grande distance entre deux sommets du graphe : $\Delta(G) = \max\{dist_G(u, v); u, v \in V(G)\}$.

Définition 2.9 *Étant donnés deux graphes G et H, un morphisme de G sur H est une application ϕ de $V(G)$ dans $V(H)$ et de $E(G)$ dans $E(H)$ telle que pour tous $u, v \in V(G)$ et $e \in E(G)$, si $\{u, v\} = ext(e)$, alors $ext(\phi(e)) = \{\phi(u), \phi(v)\}$.*

Si, de plus, ϕ est une application bijective et que ϕ^{-1} est un morphisme de H sur G, alors ϕ définit un isomorphisme entre les graphes G et H et on dit que G et H sont isomorphes.

On appellera classe ou famille de graphes, toute famille $\mathcal{F}$, close par isomorphisme ; on notera $\mathcal{S}$ la classe des graphes simples. Par la suite, on considèrera des classes de graphes sans boucle, finis et connexes.

2.2 Graphes étiquetés

Un graphe étiqueté (G, λ) est constitué d'un graphe G et d'une application λ de $V(G) \cup E(G) \rightarrow L$ où L est un ensemble d'étiquettes. On notera $\lambda(G)$ l'ensemble des étiquettes présentes sur G et on désignera par $\mathcal{G}_L$, la classe des graphes L-étiquetés.

Un graphe étiqueté (G', λ') est un sous-graphe partiel du graphe étiqueté (G, λ) si G' est un sous graphe de G et si $\forall v \in V(G'), \lambda(v) = \lambda'(v)$ et $\forall e \in E(G'), \lambda(e) = \lambda'(e)$, c'est à dire que λ' est la restriction de λ à $V(G') \cup E(G')$: on notera $\lambda' = \lambda_{|G'}$.

Définition 2.10 *Étant donnés deux graphes étiquetés (G, λ) et (G', λ'), un morphisme de (G, λ) sur (G', λ') est un morphisme ϕ de G sur G' qui préserve l'étiquetage. C'est à dire que pour tout sommet $v \in V(G)$, $\lambda(\phi(v)) = \lambda(v)$ et pour toute arête $e \in E(G)$, $\lambda(\phi(e)) = \lambda(e)$.*

Si, de plus, ϕ définit un isomorphisme entre les graphes non-étiquetés G et G', alors ϕ est un isomorphisme entre (G, λ) et (G', λ'), auquel cas, on notera $(G, \lambda) \simeq (G', \lambda')$.

Étant donné un graphe G, on utilisera souvent un étiquetage où tous les noeuds ont la même étiquette α et toutes les arêtes la même étiquette β. On parlera alors d'étiquetage uniforme et on notera $(G, \Lambda_{\alpha,\beta})$ cet étiquetage. Par ailleurs, en notant ϵ le mot vide, on pourra identifier tout graphe non-étiqueté G au graphe étiqueté $(G, \Lambda_{\epsilon,\epsilon})$.On pourra utiliser le terme de «graphe» pour parler indifféremment de graphe étiqueté ou non.

2.3 Revêtements

Définition 2.11 *Étant donnés deux graphes sans boucle G et H, G est un revêtement sur H à travers ϕ si ϕ est un morphisme surjectif tel que pour tout $u \in V(G)$, ϕ induit une bijection entre $I_G(u)$ et $I_H(\phi(u))$.*

Si G et H ne sont pas isomorphes, on dit que G est un revêtement propre de H à travers ϕ.

On dira, plus généralement, que G est un revêtement de H s'il existe un morphisme ϕ tel que G soit un revêtement de H à travers ϕ.

Définition 2.12 *Un graphe G est dit minimal s'il n'existe aucun graphe dont il soit un revêtement propre.*

Définition 2.13 *Un graphe simple G est dit $\mathcal{S}$-minimal s'il n'est revêtement propre d'aucun graphe simple.*

Exemple 2.1 *Un premier exemple de revêtement est donné par les graphes G et H de la Figure 1. Ici, les lettres ne correspondent pas aux étiquettes des sommets ou des arêtes mais permettent de définir le morphisme ϕ. L'image sur H de chaque noeud et de chaque arête de G par ϕ est définie par la lettre adjacente.*

Les graphes G' et H de la Figure 1 sont des exemples de graphes minimaux pour la notion de revêtement. Les seuls graphes dont ils sont revêtements leur sont isomorphes. Par ailleurs, bien que G ne soit pas minimal puisqu'il est un revêtement propre de H, G est un graphe simple qui n'est revêtement propre d'aucun autre graphe simple et donc G est $\mathcal{S}$-minimal.

Proposition 2.1 *Soient G et H deux graphes connexes tel que G soit un revêtement de H à travers ϕ.*

1. *Deux sommets voisins dans G ont des images différentes par ϕ.*
2. *Deux arêtes de G incidentes à un même sommet ont des images distinctes par ϕ et par conséquent, l'image inverse d'une arête de H est une union d'arêtes disjointes sur les sommets.*
3. *Il existe une constante q telle que $\forall v \in V(H), \forall f \in E(H), q = |\phi^{-1}(v)| = |\phi^{-1}(f)|$; q est le nombre de feuillets du revêtement.*
4. *Si H est simple, alors G est simple et pour tout sommet $u \in V(G)$, ϕ induit un isomorphisme entre $B_G(u)$ et $B_H(\phi(u))$.*

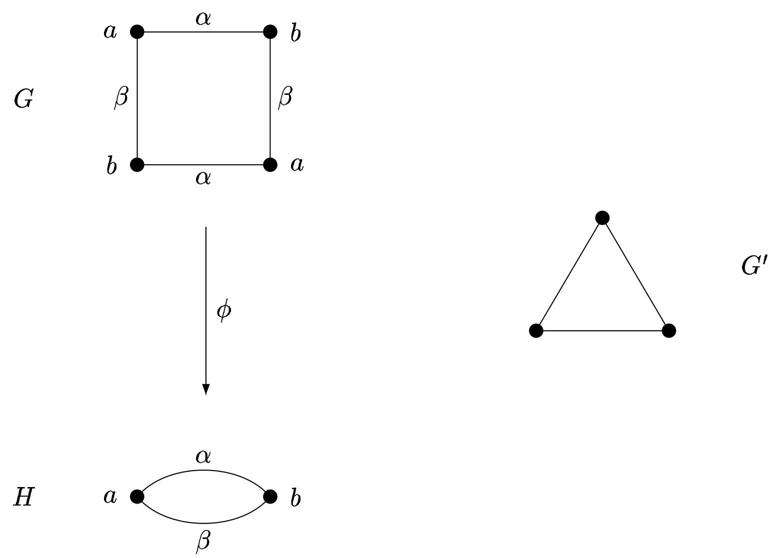

FIG. 1 – Premiers exemples.

5. *Si H est simple, pour tout sommet $v \in V(H)$, $\phi^{-1}(B_H(v))$ est une union disjointe de boules isomorphes à $B_H(v)$.*

Preuve :

1. Soient u et u' deux sommets voisins de G et une arête e incidente à u et u' ; si $\phi(u) = \phi(u')$, alors $\phi(e)$ a une seule extrémité dans H : $\phi(u)$, ce qui est interdit puisqu'on travaille sur des graphes sans boucle.
2. Soient e et e' deux arêtes distinctes de G incidentes à un même sommet u. Puisque ϕ induit une bijection entre $I_G(u)$ et $I_H(\phi(u))$ et que $e \neq e'$, $\phi(e) \neq \phi(e')$ et donc $\phi^{-1}(e)$ est une réunion d'arêtes disjointes sur les sommets.
3. On montre d'abord que pour tout sommet $v \in V(H)$ et toute arête f incidente à v dans H, $|\phi^{-1}(v)| = |\phi^{-1}(f)|$.

   Soit $u \in \phi^{-1}(v)$, puisqu'il y a isomorphisme local, il existe une arête $e \in E(G)$ telle que $\phi(e) = f$; cette arête ne peut être incidente qu'à un seul sommet de $\phi^{-1}(v)$. Ainsi, à tout $u \in \phi^{-1}(v)$, on peut associer une arête différente dans $\phi^{-1}(f)$ et donc $|\phi^{-1}(v)| \leq |\phi^{-1}(f)|$.

   Réciproquement, soit $e \in \phi^{-1}(f)$, alors il existe u, une extrémité de e telle que $\phi(u) = v$ et de plus, u n'a pas d'autre arête incidente dans $\phi^{-1}(f)$. Ainsi, à tout $e \in \phi^{-1}(f)$, on peut associer un sommet différent dans $\phi^{-1}(v)$ et alors $|\phi^{-1}(v)| \geq |\phi^{-1}(f)|$.

   Par conséquent $|\phi^{-1}(v)| = |\phi^{-1}(f)|$, et puisque le graphe est connexe, par induction sur la distance entre deux sommets, on montre qu'il existe une constante q telle que $\forall v \in V(H), \forall f \in E(H), q = |\phi^{-1}(v)| = |\phi^{-1}(f)|$.

4. Si H est un graphe simple, alors, pour toutes arêtes $e \neq e'$ de G, on est assuré que $ext(\phi(e)) \neq ext(\phi(e'))$ et par conséquent $ext(e) \neq ext(e')$: G est un graphe simple.

   Puisque le graphe H est simple et que G est un revêtement de H à travers ϕ, pour tout sommet $v \in V(H)$ et pour tout sommet $u \in \phi^{-1}(v)$, ϕ induit une bijection entre $B_G(u)$ et $B_H(v)$ et par conséquent, l'image inverse de $B_H(v)$ est une union de boules de G isomorphes à $B_H(v)$.

5. S'il existe deux sommets $u, u' \in \phi^{-1}(v)$ tels que $B_G(u)$ et $B_G(u')$ s'intersectent, alors u et u' ne peuvent pas être voisins et donc ils possèdent un voisin commun u''. Soient e l'arête reliant u à u'' dans G et e' celle reliant u' à u'', puisque l'image inverse d'une arête est une union disjointe d'arête, $\phi(e) \neq \phi(e')$ mais $ext(\phi(e)) = \{\phi(u), \phi(u'')\} = \{v, \phi(u'')\} = \{\phi(u'), \phi(u'')\} = ext(\phi(e'))$ et donc le graphe H n'est pas simple, d'où une contradiction.

   Par conséquent, pour tout sommet $v \in H$, l'image inverse de $B_H(v)$ est une union disjointe de boules isomorphes à $B_H(v)$.

$\square$

Remarque : Si G est revêtement d'un graphe H, alors $|V(G)| = q|V(H)|$ et $|E(G)| = q|E(H)|$ où q est le nombre de feuillets du revêtement. En particulier, si $|V(G)|$ et $|E(G)|$ sont premiers entre eux alors G est un graphe minimal.

Exemple 2.2 *L'anneau à six éléments, représenté par le graphe G dans la Figure 2, est le revêtement d'un graphe à 2 sommets et 2 arêtes (H) et d'un autre ayant 3 sommets et 3 arêtes (H').*

On étend la notion de revêtement aux graphes étiquetés de manière naturelle. Étant donnés deux graphes étiquetés (G, λ) et (H, η), (G, λ) est un revêtement de (H, η) à travers ϕ si G est un revêtement de H à travers ϕ et ϕ préserve l'étiquetage : $\forall x \in V(G) \cup E(G), \eta(\phi(x)) = \lambda(x)$.

Remarque : Si un graphe (G, λ) est un revêtement à q feuillets d'un graphe (H, η), alors toutes les étiquettes présentes dans (G, λ) apparaissent au moins q fois.

3 Les calculs locaux

Nous donnons ici les définitions des calculs locaux et leurs relations avec les revêtements. Les systèmes de réétiquetage de graphes et plus généralement les calculs locaux vérifient les propriétés suivantes qui semblent naturelles lorsqu'on décrit des calculs distribués :

1. ils ne modifient pas le graphe sous-jacent mais seulement l'étiquetage des sommets et des arêtes, l'étiquetage final étant le résultat du calcul,
2. ils sont *locaux*, au sens où chaque étape de réétiquetage modifie seulement les étiquettes d'un sous graphe connexe de taille fixée,
3. ils sont *localement engendrés* : l'exécution d'une étape de réétiquetage ne dépend que de l'étiquetage du sous-graphe réétiqueté.

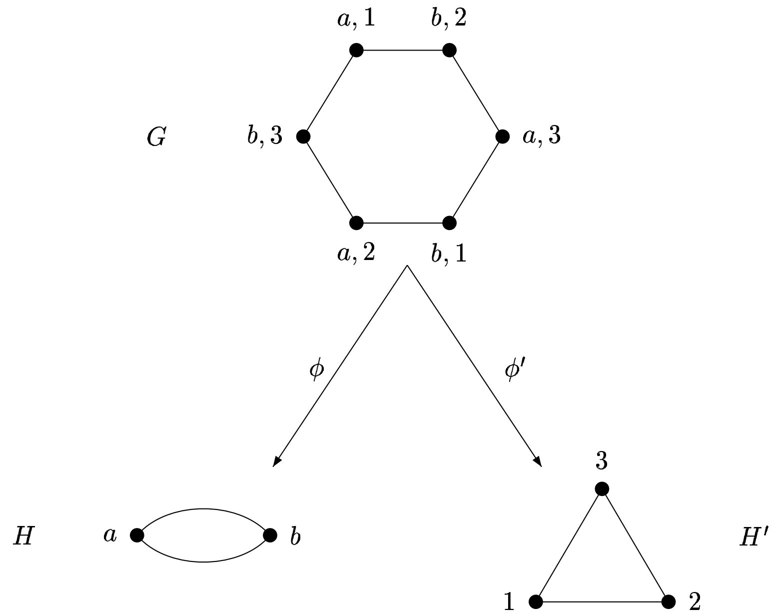

FIG. 2 – L'anneau à 6 éléments est revêtement de deux graphes minimaux.

Le réétiquetage est effectué tant qu'on peut appliquer une transformation, c'est à dire jusqu'à ce qu'on obtienne une forme normale. Un étiquetage final est un étiquetage du graphe à partir duquel on ne peut pas effectuer de transformation.

3.1 Définitions

Définition 3.1 *Une relation de réétiquetage de graphes $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur $\mathcal{G}_L$ telle que si $(G, \lambda)\mathcal{R}(G, \lambda')$ alors $G = G'$.*

On notera $\mathcal{R}^*$ la fermeture transitive et réflexive de $\mathcal{R}$.

On dira que le graphe (G, λ) est $\mathcal{R}$-irréductible (ou irréductible, s'il n'y a pas de confusion possible) s'il n'existe aucun graphe étiqueté (G, λ') tel que $(G, \lambda)\mathcal{R}(G, \lambda')$. L'étiquetage λ d'un graphe irréductible (G, λ) est appelé étiquetage final. Pour $(G, \lambda) \in \mathcal{G}_L$, $Irred_{\mathcal{R}}(G, \lambda)$ est l'ensemble des graphes irréductibles (G, λ') tels que $(G, \lambda)\mathcal{R}^*(G', \lambda')$.

On se restreint à des relations de réétiquetage qui sont récursives et dont les ensembles des graphes irréductibles associés sont aussi récursifs ; ces restrictions permettent de définir des objets avec une puissance de calcul «raisonnable».

Une exécution de $\mathcal{R}$ sur le graphe (G, λ) est une suite $(G, \lambda_0 = \lambda)$ $\mathcal{R}$ (G, λ_1) $\mathcal{R} \cdots \mathcal{R}$ (G, λ_i) $\mathcal{R} \cdots$ de pas de calcul tels que pour tout $i, (G, \lambda_i)\mathcal{R}(G, \lambda_{i+1})$.

La relation $\mathcal{R}$ est une relation noethérienne s'il n'existe pas de suite infinie $((G_i, \lambda_i))_{i \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout i, $(G_i, \lambda_i)\mathcal{R}(G_{i+1}, \lambda_{i+1})$: toute exécution de $\mathcal{R}$ est finie.

3.2 Réétiquetage sur une boule

On définit ici des relations de réétiquetage telles que l'application d'une règle ne dépende que de la configuration d'une boule du graphe et que seuls les sommets de cette boule changent d'état.

Définition 3.2 *Un relation de réétiquetage $\mathcal{R}$ est dit locale sur les boules si toute application de $\mathcal{R}$ ne modifie les étiquettes que dans une boule du graphe : $(G,\lambda)\mathcal{R}(G,\lambda')$ implique qu'il existe $v \in V(G)$ tel que pour tout $x \notin V(B_G(v)) \cup E(B_G(v)), \lambda(x) = \lambda'(x)$.*

Dans la définition suivante, on dit qu'une relation de réétiquetage $\mathcal{R}$ est localement engendrée sur les boules si elle est déterminée uniquement par son comportement sur les boules.

Définition 3.3 *Soit $\mathcal{R}$ une relation de réétiquetage locale sur les boules, on dit que $\mathcal{R}$ est localement engendrée sur les boules si pour tous graphes étiquetés $(G,\lambda),(G',\lambda'),(H,\eta),(H',\eta')$ et tous sommets $u \in V(G)$ et $v \in V(H)$ tels qu'il existe un isomorphisme ϕ de $B_G(u)$ dans $B_H(v)$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. *$\lambda(x) = \eta(\phi(x))$ et $\lambda'(x) = \eta'(\phi(x))$, pour tout $x \in V(B_G(u)) \cup E(B_G(u))$*
2. *$\lambda(x) = \lambda'(x)$, pour tout $x \notin V(B_G(u)) \cup E(B_G(u))$*
3. *$\eta(x) = \eta'(x)$, pour tout $x \notin V(B_H(v)) \cup E(B_H(v))$*

alors $(G,\lambda)\mathcal{R}(G,\lambda')$ si et seulement si $(H,\nu)\mathcal{R}(H,\nu')$.

Soient $\mathcal{R}$ une relation de réétiquetage localement engendrée sur une boule, et un système de règles de réétiquetage $(\mathcal{R}_i = (C_i, R_i))_i$. On dit que ces règles décrivent $\mathcal{R}$, si pour tous graphes étiquetés (G,λ) et (G,λ'), $(G,\lambda)\mathcal{R}(G,\lambda')$ si et seulement s'il existe une règle $\mathcal{R}_i = (C_i, R_i)$ et un sommet $v \in V(G)$ tels que seul l'étiquetage de $B_G(v)$ est modifié, que $(B_G(v), \lambda_{|B_G(v)}) \simeq C_i$ et que $(B_G(v), \lambda'_{|B_G(v)}) \simeq R_i$.

Un pas de calcul sur le graphe (G,λ) est l'application d'une règle $\mathcal{R}_i = (C_i, R_i)$ sur une boule de (G,λ) ; on substitue cette boule, qui doit être isomorphe à la condition C_i, par le réétiquetage R_i.

Les calculs locaux sur les boules sont les calculs sur les graphes correspondant à des relations de réétiquetage localement engendrées sur les boules.

3.3 Réétiquetage sur les arêtes

On définit ici des relations de réétiquetage localement engendrées par des réétiquetages d'arêtes. On souhaite que l'application d'une règle ne dépende que de l'étiquette d'une arête du graphe et des étiquettes de ses extrémités et qu'elle ne modifie que ces étiquettes.

Définition 3.4 *Soit $\mathcal{R}$ une relation de réétiquetage de graphes, $\mathcal{R}$ est dit locale sur les arêtes si $\mathcal{R}$ ne modifie que les étiquettes d'une arête du graphe et de ses extrémités : $(G,\lambda)\mathcal{R}(G,\lambda')$ implique qu'il existe $e \in E(G)$ telle que $\forall e' \in E(G) \setminus \{e\}, \lambda(e') = \lambda'(e')$ et $\forall v \in V(G) \setminus ext(e), \lambda(v) = \lambda'(v)$.*

Dans la définition suivante, on dit qu'une relation de réétiquetage est localement engendrée sur les arêtes si elle est déterminée par son comportement sur les arêtes.

Définition 3.5 *Une relation $\mathcal{R}$ de réétiquetage de graphes locale sur les arêtes est dite localement engendrée sur les arêtes si pour tous graphes étiquetés (G, λ), (G, λ'), (H, η), (H, η'), toutes arêtes $e \in E(G)$ et $f \in E(H)$ dont les extrémités respectives sont $\{u_1, u_2\}$ et $\{v_1, v_2\}$ telles que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\lambda(u_1) = \eta(v_1), \lambda(u_2) = \eta(v_2), \lambda(e) = \eta(f)$ *et* $\lambda'(u_1) = \eta'(v_1), \lambda'(u_2) = \eta'(v_2), \lambda'(e) = \eta'(f)$
2. $\lambda(e') = \lambda'(e')$, *pour tout* $e' \in E(G) \setminus \{e\}$ *et* $\lambda(u) = \lambda'(u)$, *pour tout* $u \in V(G) \setminus \{u_1, u_2\}$
3. $\eta(f') = \eta'(f')$, *pour tout* $f' \in E(H) \setminus \{f\}$ *et* $\eta(u) = \eta'(u)$, *pour tout* $v \in V(H) \setminus \{v_1, v_2\}$

alors cela implique que $(G, \lambda)\mathcal{R}(G, \lambda')$ *si et seulement si* $(H, \nu)\mathcal{R}(H, \nu')$.

Soient une relation de réétiquetage localement engendrée sur une arête $\mathcal{R}$ et un système de règles de réétiquetage $(\mathcal{R}_i = (C_i, R_i))_i$. On dit que ces règles décrivent $\mathcal{R}$, si pour tous graphes étiquetés (G, λ) et (G, λ'), $(G, \lambda)\mathcal{R}(G, \lambda')$ si et seulement s'il existe une règle $\mathcal{R}_i = (R_i, C_i)$ et une arête $e \in E(G)$ telles que seules les étiquettes de e et de ses extrémités sont modifiées, que $((ext(e), \{e\}), \lambda) \simeq C_i$ et que $((ext(e), \{e\}), \lambda') \simeq R_i$.

Un pas de calcul sur le graphe (G, λ) est l'application d'une règle $\mathcal{R}_i = (C_i, R_i)$ de $\mathcal{R}$; ce qui consiste à substituer une arête et ses extrémités isomorphes à C_i par le réétiquetage R_i.

Les calculs locaux sur les arêtes sont les calculs sur les graphes correspondant à des relations de réétiquetage localement engendrées sur les arêtes.

Remarque : Une relation de réétiquetage localement engendrée sur les arêtes est aussi une relation de réétiquetage localement engendrée sur les boules, et par conséquent, on pourra étendre les résultats d'impossibilité pour les réétiquetages sur les boules aux réétiquetages sur les arêtes. Par ailleurs, si on sait résoudre un problème en utilisant des calculs locaux sur les arêtes, on sait, a fortiori, le résoudre en utilisant des calculs locaux sur les boules.

3.4 Calculs locaux et revêtements

Les revêtements sont très utiles pour étudier les systèmes de réétiquetage; on présente ici un lemme qui va être très important par la suite.

Lemme 3.1 **[Ang80]** *On considère deux graphes étiquetés (G, λ) et (H, η) tels que (G, λ) soit un revêtement de (H, η) à travers $\phi : (G, \lambda) \to (H, \eta)$.*

- *Pour toute relation de réétiquetage localement engendrée sur les arêtes $\mathcal{R}$, s'il existe (H, η') tel que $(H, \eta)\mathcal{R}^*(H, \eta')$, alors il existe un graphe (G, λ') tel que $(G, \lambda)\mathcal{R}^*(G, \lambda')$ qui est un revêtement de (H, η').*
- *Si H est un graphe simple, pour toute relation de réétiquetage localement engendrée sur les boules $\mathcal{R}$, pour tout graphe étiqueté (H, η') tel que $(H, \eta)\mathcal{R}^*(H, \eta')$, il existe un revêtement (G, λ') de (H, η') tel que $(G, \lambda)\mathcal{R}^*(G, \lambda')$.*

Preuve :

Il suffit de prouver le résultat lorsqu'il existe (H, η') tel que $(H, \eta)\mathcal{R}(H, \eta')$.

Si $\mathcal{R}$ est un relation de réétiquetage localement engendrée sur les arêtes, soient $\mathcal{R}_i = (R_i, C_i)$ la règle appliquée lors de ce pas de calcul et $f \in E(H)$ l'arête réétiquetée, on peut appliquer cette règle de réétiquetage à toutes les arêtes de G qui sont dans $\phi^{-1}(\{f\})$, puisque d'après la proposition 2.1, ces arêtes sont disjointes sur les sommets et isomorphes à f. Le graphe (G, λ') ainsi obtenu est bien un revêtement de (H, η').

Si H est un graphe simple et si $\mathcal{R}$ est une relation de réétiquetage localement engendrée sur les boules, soit v le centre de la boule réétiquetée lors de ce pas de calcul. D'après la proposition 2.1, l'image inverse de $B_H(v)$ est une union disjointe de boules de G toutes isomorphes à $B_H(v)$ et par conséquent, on peut appliquer la règle de réétiquetage utilisée pour passer de (H, η) à (H, η') à chacune de ces boules et on obtient alors un graphe étiqueté (G, λ') qui satisfait les propriétés voulues.

$\square$

Cela signifie que pour toute relation $\mathcal{R}$ de réétiquetage localement engendrée sur une arête (ou sur une boule si H est un graphe simple), on peut simuler sur le graphe G toute exécution de $\mathcal{R}$ sur H. En particulier si (G, λ) est un revêtement de (H, η) à q feuillets, cela signifie qu'il existe une exécution de $\mathcal{R}$ telle que pour tout sommet $v \in V(H)$, les q sommets de $\phi^{-1}(v)$ portent tous la même étiquette.

4 Élection et énumération

4.1 Les réseaux anonymes

Un réseau anonyme est un réseau où les sommets sont initialement tous dans le même état et ne possèdent donc pas, a priori, d'étiquettes spécifiques qui permettraient de les distinguer les uns des autres ; par ailleurs, dans un réseau anonyme, tous les sommets utilisent le même algorithme. Le seul élément les différenciant est leur position dans le réseau. Initialement, ces noeuds ne connaissent pas leur degré, mais s'ils sont autorisés à observer tous leurs voisins lors d'une étape de calcul, ils peuvent le calculer.

Un réseau anonyme est par conséquent le système distribué le plus simple, au sens que si on parvient à résoudre un problème dans ce cadre, on peut aussi le résoudre dans un réseau où les noeud disposent de connaissances initiales : étiquettes distinctes, taille du réseau, diamètre du réseau, etc. Il a été prouvé que dans ce cadre, certains problèmes n'admettaient pas de solutions alors qu'ils en avaient dans un système où tous les noeuds disposaient d'un numéro unique. L'étude de ces réseaux est donc très intéressante pour pouvoir distinguer quelles sont les conditions nécessaires pour résoudre certains types de problèmes distribués.

D'une manière générale, dans le cadre anonyme, on essaie souvent d'assigner des numéros distincts à tous les sommets à partir de la position qu'ils ont dans le réseau, c'est résoudre le problème de l'énumération. Parfois, il suffit de pouvoir distinguer un sommet parmi les autres qui obtient donc un statut particulier et qui servira de référence dans la suite de l'évolution du réseau, ce qui revient à résoudre le problème de l'élection.

Certains problèmes peuvent être résolus par un algorithme terminant de manière implicite mais pas par un algorithme terminant explicitement. Un algorithme a une terminaison implicite, si toute exécution est finie et si tout étiquetage final est correct ; cependant, les sommets ne peuvent pas forcément détecter que plus aucune évolution n'est possible dans le réseau. Lorsque la terminaison est explicite, il y a au moins un sommet du graphe qui sait que l'étiquetage du graphe est final et il peut par la suite transmettre cette information aux autres noeuds du réseau.

4.2 Définitions

Le problème de l'énumération consiste à attribuer à chaque sommet du graphe G un numéro unique compris entre 1 et $V(G)$. Si cela est possible, il devient ensuite facile de résoudre dans le cadre anonyme les problèmes pour lesquels une solution est connue lorsque les noeuds ont des identités.

De manière formelle, le problème de l'énumération peut s'énoncer de la manière suivante pour une famille de graphes $\mathcal{F}$:

Définition 4.1 *Un système de réétiquetage de graphes $\mathcal{R}$ résout le problème de l'énumération sur une famille de graphes $\mathcal{F}$ s'il existe des étiquettes initiales s et t (qui dépendent de $\mathcal{F}$) telles que pour tout graphe $G \in \mathcal{F}$, toute exécution de $\mathcal{R}$ sur $(G, \Lambda_{s,t})$ termine, tout étiquetage final induit une bijection de $V(G)$ sur $\{1, \ldots, |V(G)|\}$.*

Pour étudier les systèmes de réétiquetage résolvant le problème de l'énumération, on aura parfois besoin de montrer qu'au cours de l'exécution, l'ensemble des numéros portés par les sommets forme un ensemble connexe d'entiers de la forme $\{1, \ldots, k\}$ que l'on notera $\mathbb{N}_k$.

Le problème de l'élection consiste à distinguer un sommet du graphe parmi les autres : ce sommet prend l'étiquette *ÉLU* alors que tous les autres prennent l'étiquette *NON-ÉLU*. Les étiquettes *ÉLU* et *NON-ÉLU* sont des étiquettes finales, c'est à dire que une fois qu'un sommet a pris une de ces étiquettes, il ne peut plus en changer par la suite.

Définition 4.2 *Un système de réétiquetage de graphes $\mathcal{R}$ résout le problème de l'élection sur une famille de graphes $\mathcal{F}$ s'il existe des étiquettes initiales s et t (qui dépendent de $\mathcal{F}$) telles que, pour tout graphe $G \in \mathcal{F}$, toute exécution de $\mathcal{R}$ sur $(G, \Lambda_{s,t})$ termine et tout étiquetage final est tel qu'un unique sommet porte l'étiquette finale* ÉLU *et que tous les autres portent l'étiquette finale* NON-ÉLU.

4.3 Équivalence entre élection et énumération

Dans cette partie, on va d'abord montrer que si on sait résoudre le problème de l'énumération avec détection de la terminaison sur un graphe G, alors on peut résoudre le problème de l'élection. On décrit ensuite un algorithme qui permet d'énumérer dans un graphe où un sommet est élu et on s'intéresse enfin à la détection de la terminaison. On va présenter ces algorithmes en utilisant des calculs locaux sur les arêtes qui sont a fortiori des calculs locaux sur les boules.

4.3.1 Élire lorsqu'on sait énumérer

Il est assez facile d'adapter un système résolvant le problème de l'énumération avec détection de la terminaison pour résoudre le problème de l'élection dans le réseau. En effet, il suffit de rajouter une règle élisant le noeud portant le numéro 1 lorsque ce noeud sait que l'algorithme est terminé, il prend alors l'étiquette *ÉLU* et on rajoute une règle qui propage l'information : tout noeud ayant un voisin dont l'étiquette est *ÉLU* ou *NON-ÉLU* prend alors l'étiquette *NON-ÉLU*. Le système de réétiquetage obtenu résout bien le problème de l'élection, puisqu'il ne peut y avoir deux sommets qui portent l'étiquette 1 lorsque l'algorithme d'énumération a atteint une configuration finale et par ailleurs, une fois qu'un sommet a pris une étiquette *ÉLU* ou *NON-ÉLU*, il n'en change plus.

4.3.2 Énumérer dans un graphe où un sommet est distingué

On considère désormais un graphe étiqueté (G, λ) dans lequel il existe un unique noeud $v \in V(G)$ portant l'étiquette E qui correspond au sommet élu et où tous les autres noeuds portent l'étiquette N qui sont les sommets non-élus ; on suppose par ailleurs, que toutes les arêtes portent l'étiquette 0. On va présenter un système de règles de réétiquetage sur les arêtes qui résout le problème de l'énumération sur ce graphe. On va d'abord donner un algorithme qui permet de calculer un arbre couvrant du graphe dont la racine est le sommet portant initialement l'étiquette E, puis on va décrire un algorithme utilisant cet arbre couvrant pour distribuer des numéros différents à tous les sommets, et enfin, on s'intéressera aux conditions nécessaires pour détecter la terminaison.

4.3.3 Calcul d'un arbre couvrant

Pour calculer un arbre couvrant, on utilise les règles de réétiquetage décrites ci-dessous. On transforme le sommet dans l'état E en racine de l'arbre, et par la suite, tout sommet de l'arbre (c'est à dire dans l'état A ou R) ayant un voisin dans l'état N transforme ce sommet en un sommet l'arbre et marque l'arête incidente à ces deux sommets comme étant dans l'arbre.

$$
\begin{aligned}
A_1 :&\quad E \longrightarrow R \\
A_2 :&\quad R \overset{0}{—} N \longrightarrow R \overset{1}{—} A \\
A_3 :&\quad A \overset{0}{—} N \longrightarrow A \overset{1}{—} A
\end{aligned}
$$

Remarque : On calcule ici un arbre couvrant dont un sommet est distingué (dans l'état R) ; en effet, par la suite, cette racine va jouer un rôle particulier lors de l'énumération.

Lemme 4.1 *Lors de l'exécution de l'algorithme, les propriétés suivantes sont toujours vraies :*
- *Toutes les arêtes incidentes à un noeud étiqueté par N portent l'étiquette* 0.
- *Tous les sommets portant une étiquette différente de N ont au moins une arête incidente portant l'étiquette* 1*, excepté lorsqu'il y a un seul sommet dans ce cas.*
- *L'ensemble des noeuds v tels que $\lambda(v) \neq N$ et l'ensemble des arêtes e telles que $\lambda(e) = 1$ forment un arbre.*

Preuve :

Initialement, ces propriétés sont trivialement vraies et les seules règles qui réécrivent les sommets étiquetés par N et les arêtes étiquetées par 0 sont les règles R_2 et R_3 qui conservent bien ces propriétés.

□

Proposition 4.2 *La relation $\mathcal{A}$ de rééétiquetage décrite par les règles ci-dessus est noethérienne et dans toute configuration finale, l'ensemble des sommets de G et des arêtes portant l'étiquette 1 forment un arbre couvrant de G.*

Preuve :

Soit V' l'ensemble des sommets de l'arbre portant une des étiquettes R ou A, il est clair que toute application de l'une des règles de réétiquetage augmente strictement la taille de $|V'|$. Puisque cette taille est bornée par $|V(G)|$, on ne peut avoir de suite infinie de réétiquetages : $\mathcal{A}$ est une relation noethérienne.

Dans la configuration finale, il ne peut exister de noeud étiqueté par N, puisqu'alors un de ces noeuds serait voisin d'un noeud A ou R et on pourrait appliquer A_2 ou A_3. D'après le lemme 4.1, dans la configuration finale, l'ensemble des sommets du graphe et l'ensemble des arêtes étiquetées par 1 forment donc un arbre couvrant du graphe.

□

4.3.4 Énumération

On va utiliser l'arbre construit pour propager de l'information uniquement grâce aux arêtes présentes dans l'arbre (c'est-à-dire étiquetées par 1). Pour obtenir un numéro, chaque sommet doit le demander à son père dans l'arbre et cette demande remonte de proche en proche jusqu'à la racine de l'arbre qui distribue tour à tour les numéros aux noeuds en faisant la demande. Lorsqu'un sommet reçoit un numéro de son père, ou bien il se l'attribue s'il n'en n'avait pas encore, ou bien il le transmet à un de ses fils en ayant fait la demande.

Étiquettes L'étiquette de la racine est désormais $(R, 1, c)$: R signifie que ce noeud est la racine de l'arbre, 1 est le numéro attribué à ce sommet, c est un compteur qui correspond au premier numéro libre.

Les autres sommets prennent des étiquettes (A, n, p, S) quand ils sont ajoutés dans l'arbre où A signifie qu'ils sont des sommets de l'arbre, n et p sont des entiers et S code l'état dans lequel est le noeud.

L'entier n peut être 0 ou un entier compris entre 1 et $|V(G)|$. Lorsqu'un sommet est ajouté dans l'arbre, si son père est différent de la racine, un numéro ne peut pas lui être tout de suite attribué, et alors $n = 0$. Par la suite, un numéro unique compris entre 1 et $|V(G)|$ lui sera attribué et ne sera plus modifié par la suite. L'entier p est le numéro du «père» du sommet dans l'arbre, c'est à dire le sommet grâce auquel il a été ajouté dans l'arbre.

L'état S est P si l'état est «passif» ; il vaut ? si le sommet a demandé un numéro à son père dans l'arbre pour lui ou pour un de ses descendants, on dit que le sommet est dans un état de «demande» ; c'est un entier compris entre 1 et $|V(G)|$ s'il transmet un numéro attribué par la racine à l'un des descendants de ce sommet, on dit alors que le sommet est dans un état de «transmission».

Règles de calcul Dans les règles décrites ci dessous, les trois premières s'inspirent des règles précédentes : ce sont les règles grâce auxquelles des sommets sont rajoutés dans l'arbre. Les quatre règles suivantes sont les règles qui permettent d'utiliser les arêtes de l'arbre pour faire circuler les demandes de numéros et les numéros attribués entre les sommets et la racine de l'arbre.

Lorsque l'état élu est ajouté dans l'arbre,il prend le numéro 1 et le premier numéro libre est 2.

$$E_1 : E \longrightarrow (R, 1, 2)$$

Lorsqu'un sommet voisin de la racine est rajouté dans l'arbre par la règle E_2, la racine donne tout de suite un numéro à ce sommet qui le prend et qui note que son père est la racine.

$$E_2 : (R, 1, c) \overset{0}{\text{——}} N \longrightarrow (R, 1, c+1) \overset{1}{\text{——}} (A, c, 1, P)$$

Lorsqu'un voisin d' un sommet de l'arbre distinct de la racine est ajouté dans l'arbre, un numéro ne peut pas lui être attribué directement et il prend donc le numéro 0, note le numéro de son père, se place dans l'état ? pour indiquer qu'il souhaite obtenir un numéro.

$$E_3 : (A, n, p, P) \overset{0}{\text{——}} N \longrightarrow (A, n, p, P) \overset{1}{\text{——}} (A, 0, n, ?)$$

Lorsqu'un noeud dans l'état P a un de ses fils dans l'état ?, il se place lui aussi dans cet état pour signifier qu'il souhaite obtenir un numéro pour un de ses descendants.

$$E_4 : (A, n, p, ?) \overset{1}{\text{——}} (A, p, q, P) \longrightarrow (A, n, p, ?) \overset{1}{\text{——}} (A, p, q, ?)$$

Lorsque la racine a un fils dans l'état ?, il lui transmet un numéro qui de proche en proche parvient à un sommet en ayant fait la demande.

$$\begin{array}{ll}
E_5 : & (A, n, 1, ?) \overset{1}{\text{—}} (R, 1, c) \longrightarrow (A, n, 1, c) \overset{1}{\text{—}} (R, 1, c+1) \\
E_6 : & (A, n, p, ?) \overset{1}{\text{—}} (A, p, q, k) \longrightarrow (A, n, p, k) \overset{1}{\text{—}} (A, p, q, P) \text{ si } n \geq 1 \\
E_7 : & (A, n, p, k) \overset{1}{\text{—}} (A, 0, n, ?) \longrightarrow (A, n, p, P) \overset{1}{\text{—}} (A, k, n, P)
\end{array}$$

Propriétés Avec le même raisonnement que précédemment, on montre que l'ensemble des sommets portant une étiquette distincte de N et l'ensemble des arêtes portant l'étiquette 1 forment un arbre.

Pour tout sommet v, on note $\varepsilon^i(e)$ l'étiquette de v après la $i$ème étape de calcul. On note $V^i = (\varepsilon^i(v))_{v \in V(G)}$ l'état du graphe après l'étape i. On note $(R, 1, c_i)$ l'étiquette de la racine de l'arbre après l'étape i.

On va montrer dans le lemme suivant que les numéros présents dans l'arbre forment un ensemble $\mathbb{N}_k$.

Lemme 4.3 *Soit $(R, 1, c)$ l'état de la racine de l'arbre à un instant donné, alors pour tout $0 < m < c$, il existe un unique sommet dans l'arbre qui porte le numéro i ou qui est dans un état de transmission du numéro i. Par ailleurs, pour tout $k \geq c$, il n'existe aucun sommet du graphe qui porte le numéro k ou qui est dans un état transmettant k.*

Preuve :

Initialement, la seule règle applicable est la règle E_1 et après cette application, le résultat est vrai puisqu'il y a un seul sommet qui porte l'étiquette $(R, 1, 2)$.

Lorsqu'on applique une règle de calcul à l'étape i, on modifie les étiquettes de deux sommets ; il suffit donc de vérifier que si un numéro apparaît dans l'étiquette d'un sommet, il est unique et inférieur à c_i et que si un numéro disparaît de l'étiquette d'un sommet, il est «transféré» dans l'étiquette de l'autre sommet.

Si à l'étape $i+1$, on applique la règle E_2 ou la règle E_5 sur une arête reliant la racine à un de ses voisins v, aucun sommet du graphe ne portait le numéro c_i ou ne transmettait c_i. Dans le premier cas, le numéro de v après l'étape $i+1$ est bien unique. Dans le second cas, v est dans un état de transmission de c_i après l'étape $i+1$ et ce numéro est bien unique. Dans les deux cas, puisque $c_{i+1} = c_i + 1$, le nouveau numéro est bien inférieur à c_{i+1}.

Lorsqu'on applique la règle E_3 ou la règle E_4, aucun numéro n'est attribué et aucun noeud n'est dans un état de transmission avant ou après l'application de la règle : la propriété est donc conservée.

Si à l'étape $i+1$, on applique la règle E_6 sur une arête reliant un sommet v à un de ses fils v', alors les numéros des sommets ne sont pas modifiés. Par ailleurs, le numéro que transmettait v après l'étape i est transmis par v' après l'étape $i+1$ et a disparu de l'étiquette de v. Par induction, ce numéro est bien unique dans le graphe et inférieur à $c_{i+1} = c_i$.

Enfin, si on applique la règle E_7 à l'étape $i+1$ à un sommet v et à un de ses fils v', alors un nouveau numéro est attribué à v', mais il était transmis par v après l'étape i et ne l'est plus après l'étape $i+1$. Par induction, ce numéro est bien unique dans le graphe et inférieur à $c_{i+1} = c_i$.

□

Dans les deux lemmes suivants, on donne des propriétés vérifiées par les étiquettes d'un noeud vis à vis des étiquettes de ses descendants. En particulier, le numéro porté par un sommet est plus petit que les numéros portés par chacun de ses descendants.

Lemme 4.4 *Étant donnés deux noeuds v et $v' \in V(G)$ tels que v' soit un descendant de v, si après l'étape i, le sommet v' est dans un état de transmission d'un numéro n, alors il existe une étape $i_0 < i$ après laquelle v était dans un état de transmission de n.*

De plus, pour tout sommet $v \in V(G)$, s'il existe deux étapes $i < i'$ telles que $\varepsilon^i(v) = (A, n, p, m)$ et $\varepsilon^{i'}(v) = (A, n, p, m')$ alors $m < m'$.

Par ailleurs, si l'étiquette d'un noeud v après une étape i est (A, n, p, k), alors $n < k$.

Preuve :

Étant donné un sommet v' réétiqueté à l'étape $i+1$ tel que $\varepsilon^{i+1}(v') = (A, n, p, k)$, on note v son père dans l'arbre. La seule règle qui permet à v d'avoir cette étiquette est la règle E_6 et alors $\varepsilon^i(v) = (A, p, q, k)$. Par conséquent, la propriété est vraie si v' est le fils de v. Par une induction triviale, on démontre le premier résultat du lemme.

Pour la deuxième assertion du lemme, on va faire une induction sur la structure de l'arbre : on le montre d'abord pour les fils de la racine, puis on montre que si c'est vrai pour un sommet, alors c'est aussi vrai pour ses fils.

Si v est un fils de la racine, soit $i < i_0 \leq i'$, l'étape où la règle E_5 a été appliquée à v et à la racine où $c_{i_0-1} = m'$, on a alors d'après le lemme 4.3, $m' = c_{i_0-1} > m$ et le résultat est donc vrai dans ce cas.

Si la propriété est vraie pour un noeud v, considérons un fils v' de v et deux étapes $j < j'$ tels que $\varepsilon^j(v') = (A, n, p, m)$ et $\varepsilon^{j'}(v') = (A, n, p, m')$. Soit $j < j_0 \leq j'$, l'étape où v' a pris l'étiquette (A, n, p, m'), c'est à dire qu'on a appliqué la règle E_6 à l'étape j_0 aux sommets v et v'. Il existe $j_1 < j \leq j_0 - 1$ tel que $\varepsilon^{j_1}(v) = (A, p, q, m)$ et $\varepsilon^{j_0-1}(v) = (A, p, q, m')$ et puisque la propriété est vraie pour v, on a bien $m < m'$.

Pour la troisième partie du lemme, on considère d'abord le cas ou v est un fils de la racine et on considère l'étape $i_0 + 1$ où le noeud v a pris l'étiquette $(A, n, 1, c_{i_0})$. On sait que $\varepsilon^{i_0}(v) = (A, n, 1, ?)$ et par conséquent, d'après le lemme 4.3, $n < c_{i_0}$.

Dans le cas contraire, on note u le père de v dans l'arbre, $i_0 + 1$ l'étape où v a pris le numéro n, et $i_1 + 1$, l'étape où v a pris l'étiquette (A, n, p, k). On sait que $\varepsilon^{i_0}(u) = (A, p, q, n)$ et que $\varepsilon^{i_1}(u) = (A, p, q, k)$ et puisque $i_0 < i_1$, $n < k$.

□

Lemme 4.5 *Étant donnés deux noeuds v et $v' \in V(G)$ tels que v' soit un descendant de v, si après l'étape i_0, v porte le numéro n et v' le numéro n', alors $n < n'$.*

Preuve :

Si v est la racine de l'arbre, alors pour tout $i \geq 1$, v porte le numéro 1 qui est donc inférieur à tous les numéros de ses descendants.

Soient v un sommet différent de la racine et v' un de ses fils dans l'arbre, soit $i_0 + 1$ l'étape où v a reçu v' son numéro. Après l'étape i, v portait donc l'étiquette $(A, n, 1, n')$ et alors d'après le lemme 4.4, $n < n'$.

□

On montre dans le lemme suivant que toute exécution de l'algorithme sur un graphe termine.

Lemme 4.6 *La relation $\mathcal{E}$ de réétiquetage décrites par les règles précédentes est noethérienne et par conséquent, toute exécution de l'algorithme sur G est finie.*

Preuve :

On note que si un noeud porte l'étiquette (A, n, p, S) où $n \neq 0$, c'est à dire que le noeud a un numéro qui lui est propre, alors $n > p$: le numéro du sommet est plus grand que celui de son père.

Soit L, l'ensemble des étiquettes utilisées par les sommets du graphes, et soit f une fonction de L dans $\mathbb{N}$ de la manière suivante :

- $f(E) = f(N) = 0$,
- $f(R, 1, c) = 1$,
- $f(A, n, p, P) = 2n + 1$,
- $f(A, n, p, ?) = 2n + 2$,

– $f(A,n,p,k) = 4n$.

On note $\sigma^i = \sum_{v \in V(G)} f(\varepsilon^i(v))$, et on va montrer que pour toute étape i, $\sigma^i < \sigma^{i+1}$.

Si on applique les règles E_1, E_2 ou E_3 à l'étape $i+1$, le résultat est trivialement vrai puisque seule l'étiquette d'un noeud v est modifiée et $f(\varepsilon(v))$ passe de 0 à un entier strictement positif. Si on applique la règle E_4,une seule étiquette est modifiée et $\sigma^{i+1} = \sigma^i + 1$.

Si à l'étape $i+1$, on applique la règle E_5, un sommet v étiqueté $(A, n, 1, ?)$ prend l'étiquette $(A, n, 1, k)$ et la racine v_0 incrémente son compteur. Puisque la racine porte le numéro 1, d'après le lemme 4.3, $n > 1$, et alors la valeur de $f(\varepsilon(v))$ passe de $2n+2$ à $4n$ et a donc strictement augmentée. Par ailleurs, la valeur de $f(\varepsilon(v_0))$ reste inchangée et donc $\sigma^{i+1} > \sigma^i$.

Si on applique la règle E_6 à l'étape $i+1$, deux noeuds v et v' dont les étiquettes sont $(A, n, p, ?)$ et (A, p, q, k) prennent respectivement les étiquettes (A, n, p, k) et (A, p, q, P). Par conséquent, $\sigma^{i+1} - \sigma^i = (4n + 2p + 1) - (2n + 2 + 4p) = 2(n-p) - 1$. Or $n > p$, puisque p est le numéro du père du noeud portant le numéro n et donc cette différence est strictement positive.

Lorsqu'on applique la règle E_7 à l'étape $i+1$, deux noeuds précédemment étiquetés (A, n, p, k) et $(A, 0, n, ?)$ prennent respectivement les étiquettes (A, n, p, P) et (A, k, n, P) : $\sigma^{i+1} - \sigma^i = (2n+1+2k+1) - (4n+2) = 2(k-n)$ qui est strictement positif, puisque n est le numéro du père du noeud étiqueté par k.

D'après le lemme 4.3, les numéros portés par les noeuds du graphe sont bornés par $|V(G)|$ et donc la suite $(\sigma^i)_i$ est bornée aussi : il n'existe pas de suite infinie de réétiquetages et la relation $\mathcal{E}$ est donc noethérienne.

□

Avec ces règles de réétiquetage, on utilise l'arbre couvrant pour faire transiter de l'information : les «demandes» de numéros arrivent jusqu'à la racine grâce aux arêtes de l'arbre et les numéros attribués sont transmis aux destinataires de la même manière. Dans le lemme suivant, on montre qu'un état porte une étiquette $(A, n, p, ?)$ s'il n'a pas encore de numéro (i.e. $n = 0$) ou si un de ses fils est aussi dans un état de «demande» et qu'un sommet dans un état de «transmission» a au moins un fils dans un état de «demande».

Lemme 4.7 *Durant toute l'exécution de l'algorithme, si un sommet porte l'étiquette $(A, n, p, ?)$, ou bien $n = 0$, ou bien ce sommet a un fils dans l'arbre portant l'étiquette $(A, m, n, ?)$.*

Par ailleurs, tout sommet étiqueté par (A, n, p, k), où k est un entier, a un fils dans l'arbre dont l'étiquette est $(A, m, n, ?)$.

Preuve : Initialement, le résultat est trivialement vrai et si on applique les règles E_1 ou E_2, ces propriétés restent vraie puisque les étiquettes des sommets sont différentes de $(A, n, p, ?)$ ou (A, n, p, k).

Lorsque la règle E_3 est appliquée, un sommet prend l'étiquette $(A, 0, p, ?)$ et par induction, les propriétés sont toujours vraies.

Quand la règle E_4 est appliquée, un sommet prend l'étiquette $(A, p, q, ?)$ et ce sommet a bien un fils dont l'étiquette est $(A, n, p, ?)$; par induction, les propriétés sont vérifiées.

Lorsqu'une des règles E_5 ou E_6 est appliquée, un sommet qui portait l'étiquette $(A, n, p, ?)$ avec $n \geq 1$ et a donc un fils portant une étiquette $(A, m, n, ?)$

prend l'étiquette (A, n, p, k). Si on applique la règle E_6, le père de ce sommet qui portait l'étiquette (A, p, q, k) prend l'étiquette (A, p, q, P) et les propriétés restent donc vérifiées.

Finalement, si on applique la règle E_7, aucun des sommets réétiquetés ne porte plus d'étiquette $(A, n, p, ?)$ ou (A, n, p, k) et par induction, le résultat reste vrai.

□

On montre finalement que dans la configuration finale, tous les noeuds sont dans un état passif et ont tous des numéros distincts.

Lemme 4.8 *Dans la configuration finale, tous les noeuds ont des étiquettes de la forme* (A, n, p, P) *où* $n \in \{2, \ldots, |V(G)|\}$*, exceptée la racine qui porte l'étiquette* $(R, 1, |V(G)| + 1)$.

Preuve :

Il ne peut pas rester de sommets portant l'étiquette N, parce qu'alors au moins l'un d'eux aurait un voisin portant une étiquette différente de N et on pourrait appliquer une des règles E_2 ou E_3. Mise à part la racine, tous les noeuds ont donc une étiquette de la forme (A, n, p, S) dans la configuration finale.

Si un sommet porte l'étiquette $(A, n, p, ?)$, ou bien il existe un sommet de ce type tel que $p = 1$ et on peut appliquer la règle E_6, ou bien il existe une arête de l'arbre incidente à un sommet étiqueté $(A, n, p, ?)$ et à un autre étiqueté (A, p, q, S), où $S \neq ?$, auquel cas, on peut appliquer une des règles E_4 ou E_7. Par conséquent, il n'existe pas de sommet v portant l'étiquette $(A, n, p, ?)$ et d'après le lemme 4.7, tous les sommets distincts de la racine portent donc une étiquette de la forme (A, p, q, P). Par ailleurs, un sommet qui est dans l'état $(A, 0, q, ?)$ ne peut changer d'étiquette que par la règle E_7 : il faut qu'un numéro lui soit parvenu. Par conséquent, tous les noeuds dans l'état (A, p, q, P) sont tels que $p \neq 0$.

D'après le lemme 4.3, tous les sommets présents dans le graphe sont différents puisque tous les sommets ont un numéro dans la configuration finale, le «premier numéro libre» est $|V(G)| + 1$ et l'étiquette de la racine est $(R, 1, |V(G)| + 1)$.

□

Grâce aux lemmes 4.3, 4.6 et 4.8, on sait que toute exécution de l'algorithme est finie et que dans toute configuration finale, les noeuds ont tous un numéro distinct compris entre 1 et $|V(G)|$ et on peut donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.9 *Pour toute famille $\mathcal{F}$ de graphe pour laquelle il existe un algorithme utilisant des calculs locaux sur les arêtes (resp. sur les boules) qui résout le problème de l'élection sur $\mathcal{F}$, alors il existe un algorithme utilisant des calculs locaux sur les arêtes (resp. sur les boules) qui résout le problème de l'énumération sur $\mathcal{F}$.*

4.3.5 Détection de la terminaison

On souhaite obtenir un algorithme dont la terminaison est explicite et on va donner deux conditions suffisantes pour obtenir ce résultat :

- si la racine de l'arbre connaît la taille du graphe, alors il peut détecter la terminaison ;

– si chaque sommet connaît son degré, alors la racine de l'arbre peut détecter la terminaison.

Connaissance de la taille On modifie quelque peu l'algorithme précédent de telle sorte que lorsqu'un sommet se voit attribué un numéro k, il envoie un «accusé de réception» à son père et un noeud qui reçoit un tel accusé de réception l'envoie à son père et de proche en proche, on fait donc remonter cette information jusqu'à la racine. Étant donné un sommet de l'arbre v dont le numéro est n et le numéro du père est p, s'il doit transmettre un «accusé de réception» pour dire qu'un de ses descendants a bien reçu le numéro k, alors son étiquette est $(A, n, p, !k)$.

L'étiquette de la racine contient un ensemble d'entiers AR qui correspond aux numéros pour lesquels elle a reçu un accusé de réception. Lorsque la racine sait qu'elle a distribué $|V(G)|$ numéros (c'est à dire que son compteur est à $|V(G)|+1$) et qu'elle a reçu un accusé de réception pour chacun de ces numéros (c'est à dire que $AR = \{1, \ldots, |V(G)|\}$), alors elle sait que chacun des noeuds du graphe a un numéro et que tous ces numéros sont distincts.

Les règles de réétiquetage sont les suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
T_1: & E \longrightarrow (R, 1, 2, \{1\}) \\
T_2: & (R, 1, c, AR) \overset{0}{—} N \longrightarrow (R, 1, c+1, AR \cup \{c\}) \overset{1}{—} (A, c, 1, P) \\
T_3: & (A, n, p, P) \overset{0}{—} N \longrightarrow (A, n, p, P) \overset{1}{—} (A, 0, n, ?) \\
T_4: & (A, n, p, ?) \overset{1}{—} (A, p, q, P) \longrightarrow (A, n, p, ?) \overset{1}{—} (A, p, q, ?) \\
T_5: & (A, n, 1, ?) \overset{1}{—} (R, 1, c, AR) \longrightarrow (A, n, 1, c) \overset{1}{—} (R, 1, c+1, AR) \\
T_6: & (A, n, p, ?) \overset{1}{—} (A, p, q, k) \longrightarrow (A, n, p, k) \overset{1}{—} (A, p, q, P) \text{ si } n \geq 1 \\
T_7: & (A, n, p, k) \overset{1}{—} (A, 0, n, ?) \longrightarrow (A, n, p, !k) \overset{1}{—} (A, k, n, P) \\
T_8: & (A, n, p, !k) \overset{1}{—} (A, p, q, P) \longrightarrow (A, n, p, P) \overset{1}{—} (A, p, q, !k) \\
T_9: & (A, n, 1, !k) \overset{1}{—} (R, 1, c, AR) \longrightarrow (A, n, 1, P) \overset{1}{—} (R, 1, c+1, AR \cup \{k\})
\end{array}
$$

En particulier, étant donné un graphe G fixé dans lequel on sait résoudre le problème de l'élection, on peut trouver un algorithme qui utilise la connaissance de la taille de G pour résoudre le problème de l'énumération avec détection de la terminaison sur le graphe G et on peut alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.10 *Étant donné un graphe G, il existe un algorithme utilisant des calculs locaux sur les arêtes (resp. sur les boules) qui résout le problème de l'élection sur G si et seulement s'il existe un algorithme utilisant des calculs locaux sur les arêtes (resp. sur les boules) résolvant le problème de l'énumération avec détection de la terminaison sur G.*

Connaissance du degré Pour détecter la terminaison lorsque chaque noeud v connaît son degré $\deg(v)$, on utilise aussi l'algorithme précédent. Un sommet qui est une feuille dont tous les voisins dans le graphe ont un numéro et qui est dans un état passif ne peut plus transmettre d'information : il envoie donc un message à son père pour l'en informer. Un noeud de l'arbre dont tous les fils lui ont signifié qu'ils avaient terminé et dont tous les voisins dans le graphe ont des numéros envoie lui aussi un message à son père pour signifier qu'il a terminé. Lorsque la racine a reçu un message de tous ses fils l'informant qu'ils avaient terminés et s'il n'a plus de voisins non-numérotés dans le graphe, il sait que la configuration atteinte est finale.

L'étiquette d'un noeud v de l'arbre contient désormais deux ensembles d'entiers F et N, où N est l'ensemble des voisins connus de v dans le graphe et F est l'ensemble des fils de v ne l'ayant pas informé qu'ils avaient terminés.

L'étiquette d'un noeud v de l'arbre est donc de la forme (A, n, p, S, N, F) où n est son numéro, p est le numéro de son père, S est son état qui peut être P, ? ou k comme précédemment mais aussi T si ce sommet sait qu'il a terminé, V et F sont les ensembles décrits ci dessus. L'étiquette de la racine est désormais $(R, 1, c, V, F)$ où R signifie que ce sommet est la racine de l'arbre, 1 est le numéro de ce sommet, c est le premier numéro libre, V et F sont là aussi les ensembles décrits ci-dessus.

Un noeud envoie un message à son père pour lui dire qu'il a terminé si $|N| = \deg(v)$ et $F = \emptyset$.

Les règles suivantes sont juste des adaptations évidentes des règles données précédemment ; elles ne modifient pas du tout les ensembles N des sommets qui seront modifiés par d'autres règles. En revanche, lorsqu'un sommet prend un numéro, son père ajoute ce numéro dans l'ensemble de ses fils (règles D_2 et D_7).

D_1 : $E \longrightarrow (R, 1, 2, \emptyset, \emptyset)$

D_2 :
$$\begin{array}{c} (R,1,c,N,F) \overset{0}{—} N \\ \downarrow \\ (R,1,c+1,N,F \cup \{c\}) \overset{1}{—} (A,c,1,P,\emptyset,\emptyset) \end{array}$$

D_3 :
$$\begin{array}{c} (A,n,p,P,N,F) \overset{0}{—} N \\ \downarrow \\ (A,n,p,P,N,F) \overset{1}{—} (A,0,n,?,\emptyset,\emptyset) \end{array}$$

D_4 :
$$\begin{array}{c} (A,n,p,?,N,F) \overset{1}{—} (A,p,q,P,N,F) \\ \downarrow \\ (A,n,p,?,N,F) \overset{1}{—} (A,p,q,?,N,F) \end{array}$$

D_5 :
$$\begin{array}{c} (A,n,1,?,N,F) \overset{1}{—} (R,1,c,N,F) \\ \downarrow \\ (A,n,1,c,N,F) \overset{1}{—} (R,1,c+1,N,F) \end{array} \quad \text{si } n \geq 1$$

D_6 :
$$\begin{array}{c} (A,n,p,?,N,F) \overset{1}{—} (A,p,q,k,N,F) \\ \downarrow \\ (A,n,p,k,N,F) \overset{1}{—} (A,p,q,P,N,F) \end{array} \quad \text{si } n \geq 1$$

D_7 :
$$\begin{array}{c} (A,n,p,k,N,F) \overset{1}{—} (A,0,n,?,N,F) \\ \downarrow \\ (A,n,p,P,N,F \cup \{k\}) \overset{1}{—} (A,k,n,P,N,F) \end{array}$$

Les règles suivantes permettent d'ajouter dans l'ensemble des voisins connus d'un noeud v les numéros de ses voisins dans le graphe ; c'est pourquoi l'arête n'est pas forcément dans l'arbre. La première règle est pour une arête reliant la racine à l'un de ses voisins et la seconde est pour une arête reliant deux noeuds distincts de la racine.

$$D_8 : \quad \begin{array}{c} (R,1,c,N,F) \overset{i}{\text{—}} (A,n,1,S,N',F') \\ \downarrow \\ (R,1,p,c,N \cup \{n\},F) \overset{i}{\text{—}} (A,n,1,S,N' \cup \{1\},F') \end{array}$$

si $\quad i \in \{0,1\}, n \neq 0$
et $\quad 1 \notin N'$ ou $n' \notin N$

$$D_9 : \quad \begin{array}{c} (A,n,p,S,N,F) \overset{i}{\text{—}} (A,n',p',S',N',F') \\ \downarrow \\ (A,n,p,S,N \cup \{n'\},F) \overset{i}{\text{—}} (A,n',p',S,N' \cup \{n\},F') \end{array}$$

si $\quad i \in \{0,1\}, n \neq 0$ et $n' \neq 0$
et $\quad n \notin N'$ ou $n' \notin N$

Les règles suivantes permettent à un noeud, dont tous les fils sont dans un état indiquant qu'ils ont terminé et dont tous les voisins ont un numéro, d'indiquer à son père qu'il a, lui aussi, terminé. La première règle est faite lorsque le père du sommet en question est la racine de l'arbre, la seconde est pour les autres cas.

$$D_{10} : \quad \begin{array}{c} (A,n,1,P,N',\emptyset) \overset{1}{\text{—}} (R,1,c,N,F) \\ \downarrow \\ (A,n,p,T,N',\emptyset) \overset{1}{\text{—}} (R,1,c,N,F \setminus \{n\}) \end{array} \qquad \text{si} \quad |N'| = \deg(v)$$

$$D_{11} : \quad \begin{array}{c} (A,n,p,P,N',\emptyset) \overset{1}{\text{—}} (A,p,q,P,N,F) \\ \downarrow \\ (A,n,p,T,N',\emptyset) \overset{1}{\text{—}} (A,p,q,P,N,F \setminus \{n\}) \end{array} \qquad \text{si} \quad |N'| = \deg(v)$$

Lorsque l'étiquette de la racine v_0 est $(R,1,c,N,\emptyset)$ et que $|N| = \deg(v_0)$, alors elle sait que tous les états du graphe ont une étiquette codant qu'ils ont terminé et par conséquent, la racine peut détecter la terminaison ; on peut alors énoncer le résultat suivant :

Proposition 4.11 *Pour tout graphe G dont l'étiquetage initial λ_0 est tel que chaque noeud de G connaisse son degré, il existe un algorithme utilisant des calculs locaux sur les arêtes (resp. sur les boules) qui résout le problème de l'élection sur (G,λ_0) si et seulement s'il existe un algorithme utilisant des calculs locaux sur les arêtes (resp. les boules) résolvant le problème de l'énumération sur (G,λ_0) avec détection de la terminaison.*

En particulier, lorsqu'on utilise des calculs locaux sur les boules, chaque noeud peut calculer son degré puisqu'il peut observer tous ses voisins lors d'une étape de calcul. On peut donc établir la proposition suivante :

Proposition 4.12 *Pour toute famille de graphes, $\mathcal{F}$, il existe un système de réétiquetage sur les boules qui résout le problème de l'élection sur $\mathcal{F}$ si et seulement s'il existe un système de réétiquetage sur les boules qui résout le problème de l'énumération avec détection de la terminaison sur $\mathcal{F}$.*

4.4 Résultats d'impossibilité

La résolution du problème de l'énumération et donc de l'élection n'admet pas forcément de solution sur tous les graphes. En particulier, le lemme 3.1 a pour corollaire immédiat qu'on ne peut trouver de systèmes de réétiquetage sur les boules résolvant le problème de l'énumération pour les graphes qui ne sont pas $\mathcal{S}$-minimaux. En effet, si un graphe G est revêtement propre d'un graphe simple H, pour tout relation noethérienne de réétiquetage localement engendrée sur les boules $\mathcal{R}$, il existe une exécution de $\mathcal{R}$ sur G menant dans une configuration irréductible qui est une simulation d'une exécution de $\mathcal{R}$ sur H et alors, chaque sommet ne peut avoir une identité unique dans la configuration finale.

Par le même raisonnement, on montre qu'on ne peut pas élire en utilisant des calculs locaux sur les arêtes dans un graphe qui n'est pas minimal.

Proposition 4.13 *Pour toute famille de graphes simples $\mathcal{F}$ contenant un graphe qui n'est pas $\mathcal{S}$-minimal, il n'existe pas de système de réétiquetage sur les boules résolvant le problème de l'énumération pour $\mathcal{F}$.*

Pour toute famille de graphes $\mathcal{F}'$ contenant un graphe qui n'est pas minimal, il n'existe pas de système de réétiquetage sur les arêtes résolvant le problème de l'énumération pour $\mathcal{F}'$.

Par conséquent, il n'existe pas non plus de système de réétiquetage sur les boules (resp. sur les arêtes) pour résoudre le problème de l'élection pour une famille de graphe $\mathcal{F}$ qui contient un graphe qui n'est pas $\mathcal{S}$-minimal (resp. minimal).

5 L'algorithme de Mazurkiewicz

Nous allons ici présenter un système de réétiquetage sur les boules décrivant l'algorithme de Mazurkiewicz [Maz97] qui permet de résoudre le problème de l'énumération sur un graphe $\mathcal{S}$-minimal.

5.1 Présentation

Au départ, tous les sommets sont dans le même état ; ils vont par la suite choisir des identités avant de les communiquer aux autres noeuds du réseau. Si un noeud se rend compte qu'il existe un autre sommet du réseau qui porte le même numéro que lui, il change de numéro si certaines conditions sont vérifiées.

Un sommet choisit un numéro entre 1 et la taille du réseau qui est différent des numéros dont il connaît l'existence sur le réseau. Une fois le numéro choisi, il le diffuse accompagné de sa vue locale (l'ensemble des numéros connus de ses voisins). Si un sommet se rend compte qu'un autre sommet du réseau porte le même numéro, il compare alors leurs vues locales respectives et si sa propre vue locale est plus faible que celle de son concurrent, il change de numéro et le diffuse.

À la fin de l'exécution de l'algorithme, si le graphe n'est pas $\mathcal{S}$-minimal, il n'est pas garanti que tous les noeuds aient un numéro différent. Néanmoins, on est assuré que deux noeuds portant le même numéro ont les mêmes vues locales.

5.2 Les étiquettes

Dans cet algorithme, les arêtes ne sont pas étiquetées et on va décrire ici les informations contenues dans l'étiquette d'un sommet v lors de l'exécution de l'algorithme :

- $n(v)$ est le numéro courant du sommet v.
- $N(v)$ est la vue locale du sommet v : c'est l'ensemble des numéros connus de ses voisins qui sont strictement positifs. Par conséquent, $N(v)$ est un ensemble d'entiers de longueur au plus $\deg_G(v)$.
- $M(v)$ est la «boîte aux lettres» de v et contient les messages reçus par le sommet v qui sont tous de la forme $(n(u), N(u))$.

Un sommet v du graphe est donc étiqueté par le triplet $(n(v), N(v), M(v))$; initialement, tous les sommets portent l'étiquette $(0, \emptyset, \emptyset)$.

5.3 Relation d'ordre sur les vues locales

Pour comparer les vues locales, il faut définir un ordre total sur les ensembles d'entiers de manière à ce qu'un sommet puisse déterminer s'il doit changer de numéro lorsqu'il est en concurrence avec un autre sommet. Par ailleurs, il ne faut pas qu'un noeud change de numéro à cause d'un message qu'il aurait lui-même envoyé par le passé : l'ordre sur les vue locales est donc défini de telle sorte qu'il ne puisse que croître lors des réétiquetages successifs.

Étant donné un sommet v tel que $N(v) = \{n_1, \ldots, n_d\}$ avec $n_1 \geq \cdots \geq n_d$, la vue locale de v est le d-uple $(n_1, \ldots, n_d)$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des d-uples ordonnés de cette manière et pour comparer deux éléments de $\mathcal{N}$, on utilise l'ordre lexicographique noté $\preceq_N$; si par ailleurs, deux vues locales N et N' sont telles que $N \preceq_N N'$ et $N \neq N'$, on notera $N \prec_N N'$.

Lors de mises à jour de ces voisinages locaux, on utilisera le lemme suivant pour s'assurer de la croissance des vues locales :

Lemme 5.1 *Pour tout $N \in \mathcal{N}$ et pour tous entiers $n < n'$ tels que $n' \notin N$, $N \prec_{\mathcal{N}} N \setminus \{n\} \cup \{n'\}$*

5.4 Les règles de réétiquetage

On présente ici les règles de réétiquetage de l'algorithme de Mazurkiewicz. Les règles sont décrites pour une boule $B(v_0)$ de centre v_0 ; pour tout $v \in B(v_0)$, on note $(n(v), N(v), M(v))$ l'étiquette de v avant l'application de la règle de réétiquetage et $(n'(v), N'(v), M'(v))$ l'étiquette de v obtenue après l'application de cette règle. Pour éviter de surcharger les notations, on ne mentionne pas les étiquettes inchangées.

La première règle permet de propager sur le réseau les informations sur les noeuds ayant déjà un numéro.

M_1 : **Diffusion**

condition préalable :

– $\exists v \in B(v_0); M(v) \neq M(v_0)$

réétiquetage :

– $\forall v \in B(v_0), M'(v) = \bigcup_{w \in B(v_0)} M(w)$

La seconde règle permet à un noeud de changer de numéro s'il n'a pas encore de numéro ou s'il sait qu'un autre noeud porte le même numéro que lui et que sa vue locale est plus faible que celle de son concurrent.

M_2 : **Changement de numéro**

conditions préalables :

– $\forall v \in B(v_0); M(v) = M(v_0)$

– $n(v_0) = 0$ ou $\exists (n(v_0), N_1) \in M(v_0); N(v_0) \prec N_1$

réétiquetage :

– $n'(v) = 1 + \max\{n; \exists (n, N) \in M(v_0)\}$

– $\forall v \in B(v_0) \setminus \{v_0\}, N'(v) = N(v) \setminus \{n(v)\} \cup \{n'(v)\}$

– $\forall v \in B(v_0), M'(v) = M(w_0) \bigcup_{w \in B(v_0)} (n'(w), N'(w))$

5.5 Propriétés

On s'intéresse ici aux propriétés vérifiées par l'étiquetage du graphe au cours de l'exécution de l'algorithme afin de montrer que toute exécution termine et par la suite, on s'intéresse aux propriétés de l'étiquetage final.

On fixe un graphe G pour étudier le comportement de l'algorithme. Pour tout sommet v, on note $(n^i(v), N^i(v), M^i(v))$ l'étiquette de v après la $i$ème étape de calcul. On note $S^i = ((n^i(v), N^i(v), M^i(v))_{v \in V(G)}$ l'état du graphe après l'étape i. On définit une relation d'ordre $\preceq_S$ sur les états du graphe : pour tous états du graphe $S' = ((n'(v), N'(v), M'(v))_{v \in V(G)}$ et $S' = ((n(v), N(v), M(v))_{v \in V(G)}$, on dit que $S' \preceq_S S$ si pour tout sommet $v \in V(G)$, $n'(v) \leq n(v)$, $N'(v) \preceq_N N(v)$ et $M'(v) \subseteq M(v)$; si, de plus, $S' \neq S$, on note $S' \prec S$.

On énonce ici quelques propriétés vérifiées par les étiquettes de tous les sommets lors de l'exécution de l'algorithme ; en particulier, on montre que $N(v)$ contient exactement les numéros des voisins de v qui sont strictement positifs et que tous les voisins d'un sommet v portant un numéro strictement positif ont des numéros distincts.

Lemme 5.2 *Pour toute étape i et pour tout sommet $v \in V(G)$, les propriétés suivantes sont toujours vérifiées :*

- $n^i(v) \neq 0 \implies (n^i(v), N^i(v)) \in M^i(v)$,
- $n^i(v) \notin N^i(v)$,
- $\forall n \in N^i(v), \exists (n, N) \in M^i(v)$,
- *Pour tout $n \neq 0$, $n \in N^i(v)$ si et seulement si v a un voisin v' tel que $n^i(v') = n$,*
- *Pour tous voisins v' et v'' de v, $n^i(v') = n^i(v'') \implies v' = v''$.*

Preuve :

Initialement, toutes les sommets son étiquetés par $(0, \emptyset, \emptyset)$ et ces propriétés sont donc vraies. Si l'étiquette d'un sommet v est modifiée par l'application la règle M_1 à l'étape $i+1$, seule $M(v)$ est modifiée dans l'étiquette de v et aucun des voisins de v ne change de numéro lors de ce réétiquetage et puisque $M^i(v) \subseteq M^{i+1}(v)$, les propriétés sont conservées.

Si un sommet v_0 change de nom lors de l'étape $i+1$ par la règle M_2, c'est qu'il est le centre de la boule réétiquetée et $(n^{i+1}(v), N^{i+1}(v)) \in M^{i+1}(v)$. Puisque $\forall v \in B_G(v_0), M^i(v) = M^i(v_0)$, $\exists (n^i(v), N) \in M^i(v_0)$ et donc $n^{i+1}(v_0) > n^i(v) = n^{i+1}(v)$. Par conséquent, pour tout $n \in N^{i+1}(v_0) = N^i(v_0)$, $n^{i+1}(v_0) > n$. On sait que $N(v_0)$ et les numéros des voisins ne sont pas modifiés lors de ce réétiquetage et que $M^i(v_0) \subseteq M^{i+1}(v_0)$ et par conséquent, les autres propriétés sont aussi conservées.

Si un sommet v est un voisin d'un sommet v_0 qui change de nom lors de l'étape $i+1$, alors $(n^{i+1}(v), N^{i+1}(v)) \in M^{i+1}(v)$. Par ailleurs, $n^{i+1}(v) = n^i(v) \notin N^i(v)$, $N^{i+1}(v) = N^i(v) \setminus \{n^i(v_0)\} \cup \{n^{i+1}(v_0)\}$ et $n^{i+1}(v_0) > n^{i+1}(v) = n^i(v)$: on a donc $n^{i+1}(v) \notin N^{i+1}(v)$. Puisque $(n^{i+1}(v_0), N^{i+1}(v_0)) \in M^{i+1}(v)$, $\forall n \in N^{i+1}(v), \exists (n, N) \in M^{i+1}(v)$. De plus, le seul voisin de v qui change de numéro lors de cette étape est v_0 et puisque $N^{i+1}(v) = N^i(v) \setminus \{n^i(v_0)\} \cup \{n^{i+1}(v_0)\}$, $N^{i+1}(v)$ est bien l'ensemble des numéros strictement positifs portés par les voisins de v après l'étape $i+1$. Enfin, pour tous voisins distincts v' et v'' de v dans G, si v' et v'' sont différents de v_0, alors par induction $n^{i+1}(v') \neq n^{i+1}(v'')$. En revanche, si par exemple $v'' = v_0$, puisqu'il existe N tel que $(n^i(v'), N) \in M^i(v) = M^i(v_0)$, $n^{i+1}(v_0) > n^i(v') = n^{i+1}(v')$. Par conséquent, tous les voisins de v qui portent des numéros strictement positifs ont des numéros différents.

□

Dans le lemme suivant, on montre que la suite $(S^i)_{i \geq 0}$ est une suite strictement croissante pour l'ordre $\preceq_S$.

Lemme 5.3 *Pour toute étape i et pour tout sommet $v \in V(G)$,*
- $n^i(v) \leq n^{i+1}(v)$,
- $N^i(v) \preceq_N N^{i+1}(v)$,
- $M^i(v) \subseteq M^{i+1}(v)$.

De plus, pour toute étape i, il existe un sommet v_i tel qu'au moins une de ces inégalités soit stricte pour v_i.

Preuve :

Si un sommet v n'est pas réécrit à l'étape i, le résultat est vrai pour v. Si à l'étape $i+1$, on applique la règle M_1 sur une boule de centre v_0, on se contente d'ajouter des éléments dans $M(v)$ pour tout $v \in V(B_G(v_0))$ et la propriété est donc vérifiée. Par ailleurs, puisqu'il existe $v \in V(B_G(v_0))$ tel que $M^i(v) \neq M^i(v_0)$, il existe $v \in V(B_G(v_0))$ qui vérifie strictement cette inégalité. Si on applique la règle M_2 à l'étape $i+1$ sur une boule de centre v_0, $n^{i+1}(v_0 > n^i(v_0)$ et pour tout sommet $v \in V(B_G(v_0)) \setminus \{v_0\}, n^{i+1}(v) = n^i(v)$ et alors d'après le lemme 5.1, pour tout sommet $v \in V(B_G(v_0)) \setminus \{v_0\}, N^{i+1}(v) \preceq_N N^i(v)$ et pour tout sommet $v \in V(B_G(v_0)), M^i(v) \subset M^{i+1}(v)$.

□

On montre ici que les numéros $n > 0$ tels qu'il existe $(n, N) \in M(v)$ forment un ensemble d'entiers de la forme $\mathbb{N}_k$.

Lemme 5.4 *Étant donnés une étape i et un sommet $v \in V(G)$, pour tout $(m, N) \in M^i(v)$, pour tout $1 \leq m' \leq m$, il existe $(m', N') \in M^i(v)$.*

Preuve :

Initialement, pour tout sommet $v \in V(G)$, $M^0(v) = \emptyset$ et la propriété est donc vérifiée. On remarque que si on applique à l'étape i l'une des deux règles de réétiquetage sur une boule de centre v_0, pour tout $v \in B_G(v_0)$, $M^i(v) = M^i(v_0)$. On va donc montrer que la propriété est conservée pour le centre de la boule réétiquetée lorsqu'on applique une des règles M_1 ou M_2.

Si à l'étape $i+1$, on applique la règle M_1 à une boule de centre v_0, pour tout $(m, N) \in M^{i+1}(v_0)$, il existe $v \in B_G(v_0)$ tel que $(m, N) \in M^i(v)$ et donc par induction, pour tout $1 \leq m' \leq m$, il existe $(m', N') \in M^i(v) \subseteq M^{i+1}(v_0)$.

Si à l'étape $i+1$, on applique la règle M_2 à une boule de centre v_0, on note $k = \max\{m; \exists(m, N) \in M^i(v_0)\}$. Puisque la propriété est vraie pour $M^i(v_0)$, pour tout $m \leq k = n^{i+1}(v_0) - 1$, $\exists(m, N) \in M^{i+1}(v_0)$. Puisque par ailleurs $(n^{i+1}(v_0), N^{i+1}(v_0))$, la propriété est conservée lorsqu'on applique M_2.

□

On montre dans le lemme suivant que s'il existe $(n, N) \in M(v)$ pour un noeud $v \in V(G)$, alors il existe un sommet $w \in V(G)$ qui porte le numéro n. Puisque les numéros $n > 0$ tels qu'il existe $(n, N) \in M(v)$ forment un ensemble $\mathbb{N}_k$, cela nous permet de donner une borne sur les numéros présents dans le graphe.

Lemme 5.5 *Pour toute étape i, pour tout sommet $v \in V(G)$, si $(m, N) \in M^i(v)$ tel que $m > 0$, il existe $w \in V(G)$ tel que $n^i(w) = m$.*

Preuve :

Soit un entier $m_0 > 0$ tel qu'il existe $(m_0, N_0) \in M^i(v)$, on note $U = \{(u, j); \exists j < i, n_j(u) = m\}$, alors U n'est pas vide puisque $(m_0, N_0) \in M^i(v)$. Soit $U' = \{(u, j) \in U; \forall(u', j') \in U, (N'_j(u') \prec N_j(u)) \vee (N'_j(u') = N_j(u) \wedge j' \leq j)\}$. Si $\forall(u, j) \in U'$, $j < i$, cela signifie qu'à l'étape $j+1$, tous les sommets de U' ont changé de numéro à l'étape $i+1$. Par conséquent, U' ne contient qu'un seul élément (u, j) et par maximalité, u n'a pas pu changer de numéro à l'étape j, d'où une contradiction. Par conséquent, si un numéro non nul apparaît dans la boîte aux lettres d'un sommet, alors il existe un sommet dans le graphe portant ce numéro.

□

D'après les lemmes 5.4 et 5.5, les numéros portés par les sommets sont toujours compris entre 1 et $|V(G)|$. Par conséquent, pour tout sommet, $N^i(v)$ et $M^i(v)$ ne peuvent prendre qu'un nombre borné de valeurs. Puisque, d'après le lemme 5.3, la suite $(S^i)_{i\geq 0}$ est strictement croissante et donc finie, la relation de réétiquetage $\mathcal{M}$ décrite par les règles M_1 et M_2 est noethérienne. On est ainsi assuré de la terminaison de toute exécution de $\mathcal{M}$ sur G.

Soit ρ une exécution de l'algorithme, on notera S^ρ l'étiquetage obtenu a la fin de cette exécution. Pour tout sommet v, on notera $S^\rho(v) = (n^\rho(v), N^\rho(v), M^\rho(v))$ l'étiquette du sommet v dans la configuration finale. On donne ici les propriétés vérifiées par l'étiquetage final.

Lemme 5.6 *Soit ρ une exécution du système de réétiquetage, alors les propriétés suivantes sont vérifiées pour tous sommets $v, v' \in V(G)$.*

1. $M^\rho(v) = M^\rho(v')$,
2. $n^\rho(v) \neq 0$,

3. $n^\rho(v) = n^\rho(v') \implies S^\rho(v) = S^\rho(v')$.

Preuve :

1. Sinon, on pourrait appliquer M_1.
2. Sinon, on pourrait appliquer M_2.
3. Il reste seulement à prouver que $N^\rho(v) = N^\rho(v')$. Puisqu'on sait que $(n^\rho(v), N^\rho(v)) \in M^\rho(v) = M^\rho(v')$ et que $(n^\rho(v'), N^\rho(v')) \in M^\rho(v') = M^\rho(v)$, si $N^\rho(v) \neq N^\rho(v')$, on pourrait appliquer M_2 à la boule centrée en v ou à celle centrée en v'.

□

Dans la proposition suivante, on montre que tout étiquetage final de G induit un graphe H dont G est un revêtement ; ce qui va permettre de caractériser dans quelles familles de graphes, on peut résoudre le problème de l'énumération en utilisant des calculs locaux sur les boules.

Proposition 5.7 *Soit un graphe simple G et une exécution ρ de la relation de réétiquetage $\mathcal{M}$, alors S^ρ induit un graphe simple H et un morphisme ϕ tel que G est un revêtement de H par ϕ.*

Preuve :

Soit U l'ensemble des étiquettes présentes dans l'étiquetage final de G. Soit F l'ensemble des paires d'entiers $\{m, m'\}$ telles que il existe deux sommets voisins v et v' dans G avec $n^\rho(v) = m$ et $n^\rho(v') = m'$. On considère le graphe simple H défini par $V(H) = U$ et $E(H) = F$ tel que pour tout $\{m, m'\} \in F$, $ext(\{m, m'\}) = \{m, m'\}$. On note ϕ l'application de G dans H définie par $\forall v \in V(G), \phi(v) = n^\rho(v)$ et $\forall e \in E(G)$ telle que $ext(e) = \{v, v'\}$, $\phi(e) = \{n^\rho(v), n^\rho(v')\}$.

- ϕ définit bien un morphisme de G sur H par le choix de H et de ϕ.
- Pour tout sommet $v_0 \in V(G)$, pour tous voisins distincts v_1 et v_2 de v dans G, on sait que $n^\rho(v_1) \neq n^\rho(v_2)$ d'après le lemme 5.2, et par conséquent, $\phi(v_1) \neq \phi(v_2)$. Le morphisme ϕ induit une injection de $N_G(v)$ sur $N_H(\phi(v))$ et donc de $I_G(v)$ sur $I_H(\phi(v))$.
- Étant donné un sommet $v \in V(G)$, pour tout voisin $u_1 \in N_H(\phi(v))$, il existe $v', v'_1 \in V(G)$ tels que $\phi(v') = \phi(v)$ et $\phi(v'_1) = u_1$. Par conséquent, $n^\rho(v'_1) \in N^\rho(v') = N^\rho(v)$ et donc il existe $v_1 \in N_G(v)$ tel que $n^\rho(v_1) = n^\rho(v'_1)$, ce qui implique que $\phi(v_1) = u_1$: ϕ induit une surjection de $N_G(v)$ sur $N_H(\phi(v))$ et donc de $I_G(v)$ sur $I_H(\phi(v))$.

Par conséquent, ϕ est un morphisme surjectif de G sur H qui pour tout sommet $v \in V(G)$ induit une bijection entre $I_G(v)$ et $I_H(\phi(v))$: G est bien un revêtement de H à travers ϕ.

□

Étant donné un graphe G, si G est $\mathcal{S}$-minimal, il ne peut pas être revêtement d'un graphe simple G' que si $G \simeq G'$. Par conséquent, pour toute exécution de $\mathcal{M}$ sur G, le graphe H induit par l'étiquetage final est isomorphe à G et l'ensemble des numéros des sommets dans l'étiquetage final est exactement $\{1, \ldots |V(G)|\}$. Par ailleurs, on a montré dans la proposition 4.13 qu'on ne peut pas résoudre le problème de l'énumération avec des calculs locaux sur les boules dans un graphe qui n'est pas $\mathcal{S}$-minimal et on peut donc établir le théorème suivant :

FIG. 3 – Le graphe G est $\mathcal{S}$-minimal sans être minimal : G est un revêtement de H.

Théorème 5.8 *Pour toute famille de graphes $\mathcal{F}$, il existe un algorithme utilisant des calculs locaux sur les boules résolvant le problème de l'énumération sur $\mathcal{F}$ si et seulement si tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont des graphes $\mathcal{S}$-minimaux.*

Pour un graphe $\mathcal{S}$-minimal G fixé, on peut facilement détecter la terminaison de l'algorithme précédent, puisque lorsque le numéro $|V(G)|$ est pris par un sommet v, d'après les lemmes 5.4 et 5.5, ce sommet sait que tous les sommets ont un numéro distinct qui appartient à $\{1, \ldots, |V(G)|\}$ et peut donc détecter la terminaison. D'après la proposition 4.10, il existe aussi un algorithme utilisant des calculs locaux sur les arêtes résolvant le problème de l'élection sur G.

Corollaire 5.9 [**Maz97**] *Pour tout graphe $\mathcal{S}$-minimal G, il existe des algorithmes utilisant des calculs locaux sur les boules qui résolvent les problèmes de l'élection et de l'énumération avec détection de la terminaison sur G.*

D'après la proposition 4.10, il existe aussi un algorithme utilisant des calculs locaux sur les boules résolvant le problème de l'élection sur tout graphe $\mathcal{S}$-minimal G. Pour tout graphe G qui est $\mathcal{S}$-minimal mais qui n'est pas minimal comme le graphe G de la Figure 3 qui est un revêtement propre du graphe H, on peut donc résoudre les problèmes de l'énumération et de l'élection sur G avec des calculs locaux sur les boules mais pas avec des calculs locaux sur les arêtes ; ce qui nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 5.10 *Les calculs locaux sur les boules sont strictement plus puissants que les calculs locaux sur les arêtes.*

6 Un algorithme adapté aux calculs locaux sur les arêtes

Lorsqu'on utilise des calculs locaux sur les boules, les graphes sur lesquels on peut énumérer sont exactement les graphes $\mathcal{S}$-minimaux. On caractérise ici quels sont les graphes sur lesquels on peut résoudre le problème de l'énumération en utilisant des calculs locaux sur les arêtes. On présente un algorithme s'inspirant de l'algorithme de Mazurkiewicz qui permet de résoudre le problème de l'énumération sur graphes minimaux en utilisant un système de réétiquetage sur les arêtes.

6.1 Présentation

Chaque sommet va prendre un numéro compris entre 1 et la taille du réseau, regarder quels sont les numéros pris par ses voisins et diffuser ces informations dans le graphe. Si un sommet découvre qu'il y a un autre sommet dans le graphe avec le même numéro, il compare les informations qu'il a sur les voisinages et s'il a un voisinage «plus faible» que son concurrent, il change de numéro et le diffuse. L'unicité de chaque étiquette à la fin de l'exécution n'est garantie que si le graphe est minimal, mais dans tous les cas, on est assuré que deux sommets avec le même numéro ont des voisins portant les mêmes numéros.

6.2 Les étiquettes

On va ici décrire les informations contenues dans les étiquettes des noeuds et des arêtes du graphe lors de l'exécution de l'algorithme.

Un sommet v qui a deux voisins v_1 et v_2 qui portent le même numéro doit pouvoir les distinguer. Pour cela, on va attribuer des numéros aux arêtes incidentes à v de telle sorte qu'ils soient tous différents. Par conséquent, deux voisins v_1 et v_2 ne pourront pas être reliés à v par une arête ayant le même numéro et v pourra donc les distinguer.

Pour tout sommet v, l'étiquette du sommet v contient à tout moment de l'algorithme les informations suivantes :

- $n(v)$ est le numéro courant du sommet v.
- $N(v)$ est un ensemble de couples d'entiers (p, n) qui correspondent à l'information que v a de ses voisins et de ses arêtes incidentes ; on l'appelle donc voisinage de v.
  Le couple $(p, n) \in N(v)$ si et seulement si lors du dernier échange de numéros entre v et un voisin v' relié à v par une arête portant le numéro p, n était le numéro de v'.
- $M(v)$ est une boîte aux lettres qui contient des informations sur les étiquettes que les sommets du graphe ont eu à un moment ou à un autre et qui sont parvenues au sommet v par diffusion sur le réseau : c'est un ensemble d'éléments de la forme (n, N).

Un sommet v est donc étiqueté par un triplet $(n(v), N(v), M(v))$ qui initialement vaut $(0, \emptyset, \emptyset)$.

Une arête e reliant deux sommets v_1 et v_2 est étiquetée par un entier p qui est le numéro commun attribué à e par v_1 et v_2 et par une paire d'entiers qui correspondent aux numéros des sommets v_1 et v_2 lors du dernier échange de numéros entre v_1 et v_2 sur e. Initialement, toutes les arêtes portent l'étiquette $(0, \{0, 0\})$

6.3 Relation d'ordre sur les voisinages

Il faut pouvoir comparer les valeurs des voisinages afin de pouvoir déterminer si un voisinage est plus faible qu'un autre. Étant donnés deux couples d'entiers (p_1, n_1) et (p_2, n_2), on dit que (p_1, n_1) est inférieur ou égal à (p_2, n_2) pour l'ordre lexicographique (qu'on notera $\leq_{lex}$) si :

$$\begin{array}{ll} & p_1 < p_2 \\ \text{ou} & p_1 = p_2 \text{ et } n_1 \leq n_2 \end{array}$$

Étant donné un sommet v dont le voisinage est $N(v) = \{(p_1, n_1), \ldots, (p_q, n_q)\}$, on classe $N(v)$ par ordre lexicographique décroissant et on obtient ainsi un q-uple $((p_{i_1}, n_{i_1}), \ldots, (p_{i_q}, n_{i_q}))$ qu'on appelle représentation ordonnée du voisinage de v.

Pour comparer deux voisinages N et N', on considère leurs représentations ordonnées comme des mots et on dit que N est supérieur à N' si la première position où les mots sont différents est telle que l'élément de N associé à cette position est plus grand que celui de N'.

Plus formellement, on dit que $N' \prec N$ s'il existe $(p_0, n_0) \in N \setminus N'$ tel que pour tout $(p, n) \geq_{lex} (p_0, n_0')$ appartenant à N', alors $(p, n) \in N$. Ceci nous donne un ordre strict total, noté $\prec$. Si deux voisinages N et N' sont tels que $N \prec N'$ ou $N = N'$, on note $N \preceq N'$ qui est un ordre total.

Par ailleurs, on va avoir besoin de remplacer certains éléments de N par d'autres lors de mises à jour et on utilisera alors le lemme suivant :

Lemme 6.1 *Soient N une partie de $\mathbb{N}^2$ et $(p_1, n_1), (p_2, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(p_2, n_2) \notin N$, on a alors*

$$(p_1, n_1) <_{lex} (p_2, n_2) \implies N \prec N \setminus \{(p_1, n_1)\} \cup \{(p_2, n_2)\}$$

6.4 Les règles de réétiquetage

On présente ici les règles de réétiquetage de l'algorithme ; les règles E_2 et E_3 s'inspirent de l'algorithme de Mazurkiewicz utilisant des calculs locaux sur les boules.

La première règle permet à deux sommets reliés par une arête sur laquelle ils n'ont jamais échangé d'information de baptiser cette arête, c'est à dire de lui donner un numéro qu'aucune des arêtes incidentes à l'un des deux sommets ne porte déjà. L'application de la règle permet à un noeud de pouvoir distinguer ses voisins et cette règle doit être appliquée avant tout autre échange d'information sur cette arête. Cette règle ne s'applique qu'une fois, puisque lorsqu'un numéro a été attribuée à une arête, elle ne peut plus en changer.

E_1 : **Baptême d'une arête**

$$\begin{array}{c} (n_1, N_1, M_1) \xrightarrow{(0,\{0,0\})} (n_2, N_2, M_2) \\ \downarrow \\ (n_1, N_1', M_1') \xrightarrow{(p,\{0,0\})} (n_2, N_2', M_2') \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad & p = 1 + \max\{p'; (p', n') \in N_1 \cup N_2\} \\ & N_1' = N_1' \cup \{(p, 0)\} \\ & N_2' = N_2' \cup \{(p, 0)\} \\ & M_1' = M_1 \cup \{(n_1, N_1')\} \\ & M_2' = M_2 \cup \{(n_2, N_2')\} \end{aligned}$$

La deuxième règle, qu'on appelle règle de diffusion, permet de diffuser l'information connue sur les étiquettes qui sont présentes dans le graphe ou qui y ont été présentes.

E_2 : **Diffusion**

$$\begin{array}{ccc} (n_1, N_1, M_1) \xrightarrow{(p,\{i,j\})} (n_2, N_2, M_2) & & \text{si } p > 0 \\ \downarrow & & \text{et } M_1 \neq M_2 \\ (n_1, N_1, M') \xrightarrow{(p,\{i,j\})} (n_2, N_2, M') & & \end{array}$$

avec $\quad M' = M_1 \cup M_2$

La troisième règle permet à un sommet de changer de numéro si son numéro est 0 ou s'il sait qu'il existe dans le graphe un autre sommet qui porte le même numéro et dont le voisinage est «plus fort» pour l'ordre $\prec$.

E_3 : **Contexte non maximal**

$$\begin{array}{cl} (n, N, M) & \\ \downarrow & \text{si } n = 0 \text{ ou } \exists (n, N_0) \in M \text{ tel que } N \prec N_0 \\ (k, N, M') & \end{array}$$

avec $\quad k = 1 + \max\{n_1 ; (n_1, N_1) \in M\}$
$\qquad M' = M \cup \{(k, N)\}$

La quatrième règle permet à un sommet qui a un voisin ayant la même étiquette que lui (et donc le même numéro) de changer de numéro ; puisque la situation est totalement symétrique entre les deux sommets, le choix du sommet qui change de numéro est arbitraire. On remarque que cette règle ne peut être appliquée que si les deux noeuds n'ont jamais échangé leurs numéros le long de cette arête ; en effet, dans le cas contraire, si v et v' sont les deux sommets réétiquetés qui portaient respectivement les numéros n et n' lors du précédent échange de numéro le long de l'arête numérotée p, alors on va montrer par la suite que $n \neq n'$, $(p, n') \in N(v) \setminus N(v')$ et $(p, n) \in N(v') \setminus N(v)$.

E_4 : **Voisin identique**

$$\begin{array}{ccc} (n, N, M) \xrightarrow{(p,\{0,0\})} (n, N, M) & & \text{si } p > 0 \\ \downarrow & & \text{et } n > 0 \\ (k, N_1, M') \xrightarrow{(p,\{k,n\})} (n, N_2, M') & & \end{array}$$

avec $\quad k = 1 + \max\{n_1 ; (n_1, N_1) \in M\}$
$\qquad N_1 = N \setminus \{(p, 0)\} \cup \{(p, n)\}$
$\qquad N_2 = N \setminus \{(p, 0)\} \cup \{(p, k)\}$
$\qquad M' = M \cup \{(k, N_1), (n, N_2)\}$

La dernière règle permet à un sommet d'ajouter dans son voisinage le numéro d'un de ses voisins qu'il ne connaissait pas parce qu'il a changé de numéro depuis le dernier échange de numéros sur une arête reliant ces deux sommets.

E_5 : **Échange de numéros**

$$
\begin{array}{c}
(n_1, N_1, M) \xrightarrow{(p,\{i,j\})} (n_2, N_2, M) \\
\downarrow \\
(n_1, N_1', M') \xrightarrow{(p,\{n_1,n_2\})} (n_2, N_2', M')
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{si} & p > 0, n_1 > 0, n_2 > 0, n_1 \neq n_2 \\
& \{i, j\} \neq \{n_1, n_2\} \\
& (p, i) \in N_1 \text{ et } (p, j) \in N_2 \\
& \\
\text{avec} & N_1' = N_1 \setminus \{(p, i)\} \cup \{(p, n_2)\} \\
& N_2' = N_2 \setminus \{(p, j)\} \cup \{(p, n_1)\} \\
& M' = M \cup \{(n_1, N_1'), (n_2, N_2')\}
\end{array}
$$

6.5 Propriétés

On s'intéresse ici à diverses propriétés de l'algorithme, que ce soit au cours de son exécution afin d'assurer la terminaison ou dans la configuration finale pour pouvoir montrer qu'on a bien un algorithme d'énumération pour les graphes minimaux.

On se fixe désormais un graphe simple G pour étudier le comportement de l'algorithme. Pour tout sommet v et toute arête e, on note $(n^i(v), N^i(v), M^i(v))$ l'étiquette de v et $\varepsilon^i(e)$ celle de e après la $i$ème étape de calcul. On note $S^i = ((n^i(v), N^i(v), M^i(v))_{v \in V(G)}$ l'état du graphe après l'étape i. On se donne un ordre $\preceq_S$ sur les différents états du graphe : étant donnés deux états du graphe $S = ((n(v), N(v), M(v))_{v \in V(G)}$ et $S' = ((n'(v), N'(v), M'(v))_{v \in V(G)}$, on dit que $S' \preceq_S S$, si pour tout sommet $v \in V(G)$, $n'(v) \leq n(v)$, $N'(v) \preceq N(v)$ et $M'(v) \subseteq M(v)$; si de plus $S \neq S'$, on dit que $S' \prec S$.

On va d'abord décrire les propriétés vérifiées par la suite $(S^i)_{i \geq 0}$ avant de décrire les propriétés de la configuration finale.

Lemme 6.2 *Soit v un sommet du graphe, les propriétés suivantes sont vérifiées après l'étape i.*

1. $n^i(v) \neq 0 \implies (n^i(v), N^i(v)) \in M^i(v)$
2. $\forall (p, n') \in N^i(v), n' \neq 0 \implies \exists N'$ *tel que* $(n', N') \in M^i(v)$
3. $n^i(v) \neq 0 \implies \nexists (p, n^i(v)) \in N^i(v)$

Preuve :

On prouve ces propriétés par induction sur i. Initialement, $n^0(v) = 0$, $N^0(v) = \emptyset$ et $M^0(v) = \emptyset$ et par conséquent les propriétés sont bien vérifiées. Lorsqu'à l'étape $i+1$, on applique une des règles de réétiquetage, on a $M^i(v) \subseteq M^{i+1}(v)$.

1. Lorsqu'un sommet change de nom à l'étape $i+1$ (si la règle E_3 ou E_4 est appliquée), on a toujours $(n^{i+1}(v), N^{i+1}(v)) \in M^{i+1}(v)$ et si $N(v)$ est modifié à l'étape i (par une des règles E_1, E_4 ou E_5), on ajoute alors $(n^{i+1}(v), N^{i+1}(v))$ dans $M^{i+1}(v)$
2. Lorsqu'on ajoute un couple (p, n) dans $N(v)$ à l'étape $i+1$, on applique, soit la règle E_1, soit la règle E_4, soit la règle E_5 au sommet v et à un

de ses voisins v'. Dans le premier cas, on ajoute $(p,0)$ et alors la propriété est vérifiée. Dans les deux autres cas, on ajoute $(p, n^{i+1}(v'))$ dans $N^{i+1}(v)$ et $(n^{i+1}(v'), N^{i+1}(v'))$ dans $M^{i+1}(v)$; puisque, par induction, les autres éléments de $N^{i+1}(v)$ vérifient aussi la propriété, on a bien $\forall (p,n') \in N^i(v), \exists N'; (n', N') \in M^i(v)$.

3. Si un sommet change de nom à l'étape $i+1$ par la règle E_3 ou E_4, il prend un numéro $n^{i+1}(v)$ tel que $\forall (n', N') \in M^i(v), n^{i+1}(v) > n'$. Pour tout $(p,n') \in N^{i+1}(v)$, ou bien $(p,n') \in N^i(v)$ et donc $\exists (n', N') \in M^i(v)$ et $n^{i+1}(v) > n'$, ou bien $n' = n^i(v)$ (seulement dans le cas de la règle E_4) et alors $(n^i(v), N^i(v)) \in M^i(v)$ et $n^{i+1}(v) > n'$.

   Dans le cas où la valeur de $N(v)$ change à l'étape $i+1$ sans que $n(v)$ ne change, on a appliqué à v et à un de ses voisins v' la règle E_1, la règle E_4 ou la règle E_5. On s'intéresse ici seulement aux valeurs ajoutées dans $N(v)$ à l'étape $i+1$, puisque par induction, on sait que les autres étaient différentes. Dans le premier cas, on ajoute $(p,0)$ dans $N(v)$ et si $n^{i+1}(v) = n^i(v) > 0$, la propriété est bien vérifiée. Dans le deuxième cas, on ajoute $(p, n^{i+1}(v'))$ à $N(v)$ et alors, comme on vient de le voir, $n^{i+1}(v') > n^i(v') = n^i(v) = n^{i+1}(v)$. Dans le troisième cas, on ajoute $(p, n^i(v'))$ et pour pouvoir appliquer la règle E_4, il fallait que $n^i(v') \neq n^i(v) = n^{i+1}(v)$, donc la propriété est aussi vraie.

□

On montre dans le lemme suivant que si deux sommets ont échangé leurs numéros respectifs lors de l'application d'une règle de réétiquetage sur l'arête e, alors les numéros inscrits sur l'arête e sont distincts.

Lemme 6.3 *Étant donnés deux sommets v et v' reliés par une arête e portant une étiquette $(p, \{n_1, n_2\})$ après l'étape i, alors $n_1 > 0$ si et seulement si $n_2 > 0$, auquel cas $n_1 \neq n_2$.*

Preuve :

Initialement, c'est vrai puisque toutes les arêtes du graphe portent l'étiquette $(0, \{0,0\})$. On remarque que lorsqu'on écrit $(p, \{n_1, n_2\})$ sur une arête e reliant deux sommets v et v', on utilise la règle E_1, la règle E_4 ou la règle E_5. Dans le premier cas, on écrit alors $(p, \{0,0\})$ sur l'arête et donc la propriété est vraie.

Si à l'étape $i+1$, on applique la règle E_4 à v et v', en changeant $n(v)$, alors on écrit $(p, \{n^{i+1}(v), n^{i+1}(v')\})$ sur l'arête e, et puisque $n^{i+1}(v) > n^i(v) = n^{i+1}(v') > 0$, on a bien $n^{i+1}(v) \neq n^{i+1}(v')$.

Si on applique E_5 aux sommets v et v' à l'étape $i+1$, on écrit alors $(p, \{(n^{i+1}(v), n^{i+1}(v')\})$ sur l'arête e. Or, on sait que $n^i(v), n^i(v') > 0$, $n^{i+1}(v) = n^i(v)$ et $n^{i+1}(v') = n^i(v)$, et alors l'arête e est étiquetée par deux paires de nombres strictement positifs. Par ailleurs, on a $n^i(v) \neq n^i(v')$ et donc $n^{i+1}(v) \neq n^{i+1}(v')$. □

On montre ici qu'à tout instant de l'exécution, pour tout sommet v, $N(v)$ contient exactement l'information présente dans les étiquettes des arêtes incidentes à v.

Lemme 6.4 *Étant donnée une étape i, pour toute arête $e \in E(G)$ incidente à des sommet v et v', si $\varepsilon^i(e) = (p, \{n, n'\}) \neq (0, \{0,0\})$, $(p,n) \in N^i(v)$ et $(p,n') \in N^i(v')$ ou alors $(p,n') \in N^i(v)$ et $(p,n) \in N^i(v')$.*

Par ailleurs, pour toute étape i et pour tout sommet v, si $(p,n) \in N^i(v)$, alors $p \neq 0$ et il existe une arête $e \in I_G(v)$ et un entier n' tels que $\varepsilon^i(e) = (p, \{n, n'\})$.

Remarque : Dans la règle E_5, la condition $(p,i) \in N_1$ et $(p,j) \in N_2$ est donc toujours vraie ; elle permet seulement de déterminer quels étaient les numéros respectifs des deux sommets lors du précédent échange de numéros sur l'arête.

Preuve :

Initialement, toutes les arêtes portent l'étiquette $(0, \{0,0\})$ et pour tout sommet $v \in V(G)$, $N^0(v) = \emptyset$: le résultat est donc vrai. Si lors de l'étape i, on applique une des règles E_2 ou E_3, on ne modifie ni les étiquettes des arêtes, ni les valeurs des voisinages des noeuds : par induction, le résultat est donc vrai.

Si à l'étape i, la règle E_1 est appliquée à une arête e reliant deux sommets v et v', on réétiquette l'arête e par $(p, \{0,0\})$ où p est toujours un nombre strictement positif et on ajoute bien $(p,0)$ dans $N^i(v)$ et $N^i(v')$ et puisqu'auparavant, l'étiquette de e était $(0, \{0,0\})$, il n'est pas nécessaire de supprimer d'éléments dans $N^i(v)$ ou $N^i(v')$ pour que le résultat reste vrai.

Si à l'étape i, on applique la règle E_4 ou E_5 à une arête e reliant deux sommets v et v', on retire les informations correspondant à $\varepsilon^{i-1}(e)$ de $N^i(v)$ et $N^i(v')$ et on y ajoute bien celles correspondant à $\varepsilon^i(e)$.

□

On montre dans le lemme suivant que pour tout sommet v, les arêtes incidentes à v, qui ont des étiquettes différentes des étiquettes initiales, ont des étiquettes distinctes, ce qui permet au sommet v de pouvoir les distinguer.

Lemme 6.5 *Étant donné un sommet $v \in V(G)$, pour toute étape i, pour toutes arêtes distinctes $e, e' \in I_G(v)$, si $\varepsilon^i(e) \neq (0, \{0,0\})$ et $\varepsilon^i(e') \neq (0, \{0,0\})$, alors $\varepsilon^i(e) \neq \varepsilon^i(e')$.*

Preuve :

Initialement, le résultat est vrai puisque toutes les arêtes portent l'étiquette $(0, \{0,0\})$. Il suffit que les premières composantes des étiquettes de chaque arête incidente à un même sommet soient distinctes pour que ce sommet vérifie la propriété voulue. On remarque par ailleurs, que seule la règle E_1 modifie cette composante ; on va donc montrer que l'application de cette règle conserve la propriété.

Si à l'étape i, on applique la règle E_1 à une arête e reliant deux sommets v et v' en la réétiquetant $(p, \{0,0\})$, alors d'après le lemme 6.4, pour toute arête $e' \neq e$ incidente à v portant une étiquette $(q, \{n, n'\}) \neq (0, \{0,0\})$, (q,n) ou (q,n') appartient à $N^{i-1}(v)$ et alors par le choix de p, on est assuré que $q < p$ et donc e et e' ont des étiquettes distinctes.

□

On montre ici que l'état du graphe est strictement croissant lors de l'exécution de l'algorithme, ce qui va nous permettre de prouver sa terminaison.

Lemme 6.6 *Pour toute étape i, pour tout sommet v et pour toute arête e,*
- $n^i(v) \leq n^{i+1}(v)$
- $N^i(v) \preceq N^{i+1}(v)$
- $M^i(v) \subseteq M^{i+1}(v)$

et à chaque étape i, il existe un sommet v_0 tel qu'au moins l'une de ces trois inégalités soit stricte pour v_0.

Preuve :

Si l'étiquette d'un sommet v ou d'une arête e n'est pas modifiée à l'étape i, le résultat est vrai.

Si on applique la règle E_1 à l'étape $i+1$ sur une arête e incidente à deux sommets v et v', $N(v)$ et $N(v')$ sont modifiés et d'après le lemme 6.1, $N^i(v) \prec N^{i+1}(v)$ et $N^i(v') \prec N^{i+1}(v')$; par ailleurs $M(v)$ et $M(v')$ augmentent strictement lors de cette étape.

Si à l'étape i, on applique la règle E_2 aux sommets v et v', on a juste ajouté des éléments dans $M(v)$ et $M(v')$, ce qui nous assure que la propriété est vraie ; par ailleurs, il existait un élément de $M^i(v')$ qui n'appartenait pas à $M^i(v)$ (où l'inverse) et donc on voit bien qu'au moins un de ces deux sommets vérifie l'inégalité $M^i(v) \subset M^{i+1}(v)$.

Si le sommet v est modifiée par la règle E_3 à l'étape i, $n^i(v) < n^{i+1}(v)$, $N^i(v) = N^{i+1}(v)$ et $M^i(v) \subset M^{i+1}(v)$; les propriétés sont donc vérifiées.

Si on applique la règle E_4 à deux sommets v et v', de telle sorte que v change de nom, on voit que $n(v), N(v), N(v'), M(v), M(v')$ sont strictement plus grand qu'à l'étape précédente, alors que la valeur de $n(v')$ est inchangée.

Si on applique la règle E_5 à deux sommets v et v', on voit qu'on ajoute des éléments dans $M(v)$ et $M(v')$. Par ailleurs, on applique cette règle si au moins un des anciens sommets a changé de numéro depuis le dernier échange de numéros sur cette arête et on sait que ce numéro n'a pu qu'augmenter et par conséquent, d'après le lemme 6.1, $N(v)$ ou $N(v')$ augmente strictement.

□

Dans les deux lemmes suivants, on montre que les numéros n non nuls qui sont portés par les sommets du graphe forment un ensemble connexe d'entiers de la forme $\mathbb{N}_k$.

Lemme 6.7 *Pour toute étape i, pour tout sommet v, pour tout $(m', N') \in M^i(v)$, pour tout $1 \leq m \leq m'$, il existe $(m, N) \in M^i(v)$.*

Preuve :

Initialement, pour tout sommet v, $M^0(v) = \emptyset$ et le résultat est donc vrai.

Si on applique la règle E_1 ou la règle E_5, pour tout $(m, N) \in M^{i+1}(v)$, il existe $(m, N') \in M^i(v)$ et donc, par induction, la propriété est aussi conservée.

Si à l'étape $i+1$, on applique la règle E_2 à deux sommets v et v', pour tout $(m', N') \in M^{i+1}(v) = M^{i+1}(v')$, $(m', N') \in M^i(v) \cup M^i(v')$ et donc par induction pour tout $m \leq m'$, il existe $(m, N) \in M^i(v) \cup M^i(v') = M^{i+1}(v) = M^{i+1}(v')$.

Si à l'étape $i+1$, on applique la règle E_3, soit $m_0 = \max\{m; (m, N) \in M^i(v)\}$, par induction, $\forall m \leq m_0, \exists (m, N) \in M^i(v)$. Alors puisque $M^{i+1}(v) = M^i(v) \cup \{(n^{i+1}(v) = m_0 + 1, N^{i+1}(v))\}$, la propriété est toujours vraie après l'étape $i+1$. Lorsqu'on applique la règle E_4, pour les mêmes raisons, la propriété est aussi vérifiée.

□

Lemme 6.8 *Pour toute étape i, pour tout sommet $v \in V(G)$, pour tout couple $(m, N) \in M^i(v)$, il existe $w \in V(G)$ tel que $n^i(w) = m$.*

Preuve :

Soit un entier m_0 tel qu'il existe $(m_0, N_0) \in M^i(v)$. On pose $U = \{(u,j);$ $\exists j \leq i, n^j(u) = m_0\}$ et soit $U' = \{(u,j) \in U; \forall (u',j') \in U, (N^{j'}(u') \prec N^j(u)) \vee (N^{j'}(u') = N^j(u) \wedge j' \leq j)\}$. Puisque $(m_0, N_0) \in M^i(v)$, U n'est pas vide et par conséquent U' ne l'est pas non plus. Par ailleurs, s'il existe $(u,j) \in U'$ tel que $j = i$, alors il existe $w \in V(G)$ tel que $n^i(w) = m$. Si au contraire, $\forall (u,j) \in U', j < i$, alors il existe i_0 tel que $\forall (u,j) \in U', j = i_0$ et à l'étape $i_0 + 1$, tous les sommets u tels que $(u,j) \in U'$ ont changé de numéro. Puisqu'à chaque étape, au plus un sommet change de numéro (que ce soit par la règle E_3 ou E_4), cela signifie que U' contient un seul élément (u,j). Par conséquent u doit changer de numéro à l'étape i_0+1, mais puisqu'il n'a pas de voisin portant le même numéro que lui à ce moment là, il ne peut appliquer la règle E_4. Par ailleurs, par maximalité, u ne peut pas changer de numéro par la règle E_3 à l'étape i_0, d'où une contradiction. Ainsi, si un sommet a dans sa mémoire un numéro, il existe un sommet dans le graphe qui porte ce numéro.

□

Dans le lemme suivant, on montre que l'ensemble des numéros portés par les arêtes du graphe forment un ensemble connexe de la forme $\mathbb{N}_k$.

Lemme 6.9 *Pour toute arête $e \in E(G)$ et toute étape i, si $\varepsilon^i(e) = (p, \{n, n'\})$, alors pour tout $1 \leq q \leq p$, il existe $f \in E(G)$ et $m, m' \in \mathbb{N}$ tels que $\varepsilon^i(f) = (q, \{m, m'\})$.*

Preuve :

On prouve ce résultat par induction sur i. La propriété est vraie dans la configuration initiale où toutes les arêtes portent l'étiquette $(0, \{0, 0\})$. On remarque que la seule règle qui permet à une arête de changer de numéro est la règle E_1.

Supposons qu'à l'étape $i+1$, cette règle soit appliquée à une arête e reliant deux sommets v et v' de telle sorte que $\varepsilon^{i+1}(e) = (p, \{0, 0\})$. Si on note $r = \max\{p'; (p', n') \in N(v) \cup N(v')\}$, alors $p = r + 1$ et de plus $\varepsilon^i(e) = (0, \{0, 0\})$.

D'après le lemme 6.4, il existe une arête g incidente à v ou v' portant une étiquette de la forme $(r, \{o, o'\})$ et par induction, pour tout $1 \leq q \leq r$, il existe $f \in E(G)$ et $m, m' \in \mathbb{N}$ tels que $\varepsilon^{i+1} = \varepsilon^i(f) = (q, \{m, m'\})$; ce qui nous permet d'assurer que la propriété est conservée.

□

D'après les lemmes 6.7 et 6.8, tous les numéros pris par les sommets sont compris entre 1 et $|V(G)|$. Par ailleurs, d'après le lemme 6.9, les numéros qui sont attribués aux arêtes par la règle E_1 sont tous inférieurs à $|E(G)|$, et par conséquent, pour tout $v \in V(G)$, les valeurs des éléments de $N(v)$ sont eux aussi bornés et de même, les éléments de $M(v)$ ne peuvent eux aussi prendre qu'un nombre borné de valeurs.

Par ailleurs, il est aisé de voir qu'une arête ne peut pas changer d'étiquette sans qu'au moins une de ses extrémités n'en change et par conséquent, il suffit de s'assurer que pour toute exécution de l'algorithme, la suite $(S^i)_{i \geq 0}$ est finie pour s'assurer de la terminaison de l'algorithme.

Puisque d'après le lemme 6.6, la suite $(S^i)_{i \geq 0}$ est strictement croissante et qu'elle ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, la relation $\mathcal{E}$ de réétiquetage décrites par les règles présentées est noethérienne et on est ainsi assuré de la terminaison de toute exécution de $\mathcal{E}$ sur G.

Soit ρ une exécution de l'algorithme, on notera S^ρ l'étiquetage final obtenu à la fin de cette exécution. Pour tout sommet $v \in V(G)$ et pour toute arête $e \in E(G)$, on notera $S^\rho(v) = (n^\rho(v), N^\rho(v), M^\rho(v))$ l'étiquette de v et $\varepsilon^\rho(e)$ l'étiquette de e dans la configuration finale.

Lemme 6.10 *Soit ρ une exécution du système de réétiquetage, alors les propriétés suivantes sont vérifiées pour tous sommets $v, v' \in V(G)$.*

1. $n^\rho(v) \neq 0$
2. *Toute arête e reliant v à v' porte une étiquette $(p, \{n, n'\})$ telle que $p > 0$ et $\{n, n'\} = \{n^\rho(v), n^\rho(v')\}$*
3. $M^\rho(v) = M^\rho(v')$
4. $n^\rho(v) = n^\rho(v') \implies S^\rho(v) = S^\rho(v')$

Preuve :

1. Sinon, on pourrait appliquer E_3.
2. Puisqu'on ne peut pas appliquer la règle E_1, $p > 0$. Si $\{n, n'\} \neq \{n^\rho(v), n^\rho(v')\}$, on pourrait alors appliquer E_4 ou E_5 à l'arête e, puisque d'après la remarque précédente $n^\rho(v) \neq 0$ et $n^\rho(v') \neq 0$.
3. Dans le cas contraire, on pourrait appliquer la règle E_2.
4. On sait déjà que $M^\rho(v) = M^\rho(v')$ et si $N^\rho(v) \neq N^\rho(v')$ alors, on pourrait appliquer E_3 à l'un des deux sommets.

□

Dans la proposition suivante, on montre que tout étiquetage final de G induit un graphe simple H dont G est revêtement, ce qui nous permet de caractériser les graphes où on peut résoudre le problème de l'énumération en utilisant des calculs locaux sur les arêtes.

Proposition 6.11 *Soit un graphe G et une exécution ρ du système de réétiquetage, alors S^ρ induit un graphe H et un morphisme ϕ tel que G est un revêtement de H par ϕ.*

Preuve :

Soit F l'ensemble des étiquettes apparaissant sur les arêtes de G à la fin de l'exécution ρ et U l'ensemble des numéros des sommets apparaissant dans S^ρ. On considère le graphe H tel que $V(H) = U$, $E(H) = F$ et pour tout $f \in F$, si $f = (p, \{n, n'\})$, $ext(f) = \{n, n'\}$. Soit $\phi : G \to H$ tel que $\forall v \in V(G), \phi(v) = n^\rho(v)$ et $\forall e \in E(G), \phi(e) = \varepsilon^\rho(e)$.

- ϕ ainsi défini est bien un morphisme. En effet, étant donnée une arête e de G reliant deux sommets v et v', d'après le lemme 6.10, il existe $p > 0$ tel que $\varepsilon^\rho(e) = (p, \{n^\rho(v), n^\rho(v')\})$ et alors $ext(\phi(e)) = \{n^\rho(v), n^\rho(v')\} = \{\phi(v), \phi(v')\}$.
- Par définition de H, ϕ est un morphisme surjectif de G sur H.
- Soit $v \in V(G)$, étant données deux arêtes distinctes e et e' incidentes au sommet v, alors puisque d'après le lemme 6.10, $\varepsilon^\rho(e) = (p, \{n, n'\})$ avec $p > 0$ et $\varepsilon^\rho(e') = (q, \{m, m'\})$ avec $q > 0$ on sait par le lemme 6.5 que $\varepsilon^\rho(e) \neq \varepsilon^\rho(e')$ et donc $\phi(e) \neq \phi(e')$. Donc le morphisme ϕ induit une injection de $I_G(v)$ dans $I_H(\phi(v))$.

- Étant donné un sommet $v \in V(G)$, pour toute arête $f \in I_H(\phi(v))$, il existe $v', v'' \in V(G)$ et $e \in E(G)$ tels que $ext(e) = \{v', v''\}$, $\varepsilon^\rho(e) = (p, \{n^\rho(v'), n^\rho(v'')\}$ et $\phi(e) = f$. Par conséquent, $ext(f) = \{\phi(v'), \phi(v'')\}$ et donc on peut supposer que $\phi(v) = \phi(v')$. Ainsi, d'après le lemme 6.10, $N^\rho(v) = N^\rho(v')$ et donc d'après les lemmes 6.2 et 6.4, $(p, n^\rho(v'')) \in N^\rho(v)$. Il existe donc $e' \in I_G(v)$ tel que $\varepsilon^\rho(e') = \varepsilon^\rho(e)$; par conséquent, $\phi(e') = f$ et ϕ définit bien un morphisme surjectif de $I_G(v)$ sur $I_H(\phi(v))$.

Ainsi, ϕ est un morphisme surjectif de G sur H qui pour tout sommet $v \in V(G)$ induit une bijection entre $I_G(v)$ et $I_H(\phi(v))$ et par conséquent, G est bien un revêtement de H à travers ϕ.

□

Étant donné un graphe simple G, si G est minimal, il ne peut être revêtement que de graphes qui lui sont isomorphes et alors le graphe H induit par l'étiquetage final est isomorphe à G et l'ensemble des numéros des sommets dans l'étiquetage final est exactement $\{1, \ldots |V(G)|\}$. Par ailleurs, on a montré dans la proposition 4.13 qu'on ne peut pas résoudre le problème de l'énumération avec des calculs locaux sur les arêtes dans un graphe qui n'est pas minimal et on peut donc établir le théorème suivant :

Théorème 6.12 *Pour toute famille de graphes simples $\mathcal{F}$, il existe un algorithme utilisant des calculs locaux sur les arêtes résolvant le problème de l'énumération sur $\mathcal{F}$ si et seulement si tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont des graphes minimaux.*

Pour un graphe minimal G fixé, on peut facilement détecter la terminaison de l'algorithme précédent, puisque lorsque le numéro $|V(G)|$ est pris par un sommet v, d'après les lemmes 6.7 et 6.8, ce sommet sait que tous les sommets ont un numéro distinct qui appartient à $\{1, \ldots, |V(G)|\}$ et il peut donc détecter la terminaison de l'algorithme. Par conséquent, d'après la proposition 4.10, il existe aussi un algorithme utilisant des calculs locaux sur les arêtes résolvant le problème de l'élection sur G.

Corollaire 6.13 *Pour tout graphe minimal G, il existe des algorithmes utilisant des calculs locaux sur les arêtes qui résolvent les problèmes de l'élection et de l'énumération avec détection de la terminaison sur G.*

6.6 Comparaison avec le modèle d'Angluin

Étant donnée une arête e reliant deux sommets v et v', on remarque qu'à partir du numéro p de l'arête e et des étiquettes de ses extrémités, on peut à tout moment déterminer quelle est l'étiquette de e. En effet, si $p = 0$, alors l'étiquette de e ne peut être que $(0, \{0, 0\})$ et si $p > 0$, alors d'après le lemme 6.4 il existe $(p, i) \in N(v)$ et $(p, j) \in N(v)$ et l'étiquette de e est alors $(p, \{i, j\})$. Par conséquent, dans l'algorithme présenté précédemment, les étiquettes des arêtes peuvent être seulement les numéros attribués aux arêtes.

Dans le modèle proposé par Angluin [Ang80], le réseau est modélisé par un graphe simple G et pour tout $v \in V(G)$, il existe une bijection f_v entre $I_G(v)$ et $\{1, ..., \deg_G(v)\}$ et ainsi lors d'une synchronisation sur une arête e incidentes à deux sommets v et v', ces deux sommets peuvent déterminer grâce à quelle arête ils sont en train de communiquer, ce qui permet à un sommet de connaître son degré et de pouvoir distinguer ses voisins qui portent la même étiquette.

On considère un graphe G où chaque sommet $v \in V(G)$ connaît une bijection f_v entre $I_G(v)$ et $\{1, \ldots, \deg_G(v)\}$. Pour tout sommet $v \in V(G)$ et toute arête e reliant v à un sommet v', si lors de l'exécution de l'algorithme précédent, e porte le numéro p, v n'utilise la connaissance de p que pour distinguer v' de ses autres voisins portant le même numéro que v'. On peut alors remplacer (p, i) dans $N(v)$ par $(f_v(e), i)$ puisqu'ainsi v peut distinguer tous ses voisins. Par conséquent, dans ce cadre là, il n'est plus nécessaire de numéroter les arêtes et on peut donc n'étiqueter que les sommets du graphe.

Plus généralement, il est assez simple de montrer que dans un graphe G si tout sommet v dispose d'une bijection f_v entre $I_G(v)$ et $\{1, \ldots, \deg_G(v)\}$, on peut coder tout étiquetage des arêtes dans les étiquettes des sommets : pour toute arête e incidente à deux sommets v et v', si e porte une étiquette $\varepsilon(e)$, il suffit que v et v' associent dans leurs «mémoires» (i.e. leurs étiquettes) respectives $\varepsilon(e)$ à $f_v(e)$ et $f_{v'}(e)$. Par la suite, au lieu de mettre à jour l'étiquette de l'arête, on met à jour sa représentation dans les étiquettes de v et v'.

Dans le modèle d'Angluin, les transformations du graphe sont un type particulier de calculs locaux sur les arêtes. Lors d'un réétiquetage, seules les étiquettes des extrémités v et v' d'une arête e sont modifiées selon la procédure suivante : v et v' se synchronisent, ils échangent leurs étiquettes respectives et indépendamment l'un de l'autre, ils déterminent leurs nouvelles étiquettes en fonction de leur état et de celui de leur voisin. Par conséquent, si une arête e relie deux sommets voisins v et v' qui sont dans le même état Q, après tout pas de calcul sur e, v et v' se trouvent tous deux dans le même état Q' (puisqu'il exécutent le même algorithme à partir des mêmes paramètres). Par conséquent, il n'est pas possible d'élire de manière déterministe sur un graphe à deux sommets reliés par une unique arête si initialement les deux sommets sont dans le même état et on ne peut donc pas adapter notre algorithme à ce modèle.

Dans l'algorithme présenté ci dessus, la règle E_4 permet de rompre la symétrie entre deux noeuds voisins qui sont dans le même état. Si, comme dans le modèle d'Angluin, on souhaite qu'un sommet décide son nouvel état en fonction de l'étiquette de son voisin, on peut par exemple considérer que lors d'un réétiquetage sur une arête, on donne deux rôles différents aux deux sommets : un sommet est considéré pour ce réétiquetage comme plus important que l'autre, ce qui permet de briser la symétrie.

6.7 Est-il important de marquer les arêtes ?

On peut se demander quelle est l'importance d'autoriser des étiquettes sur les arêtes en plus de celles sur les sommets. En effet, dans l'algorithme de Mazurkiewicz utilisant des calculs locaux sur les boules, on ne se sert pas du marquage des arêtes pour résoudre le problème de l'énumération sur les graphes $\mathcal{S}$-minimaux. De plus, comme on vient de le voir, si un sommet peut distinguer les arêtes qui lui sont incidentes, il n'a pas besoin de les marquer. On va montrer ici que lorsque les noeuds n'ont pas une connaissance initiale de leurs degrés, la classe des graphes dans lesquels on peut résoudre le problème de l'énumération lorsqu'en un pas de calcul on ne modifie que les étiquettes de deux sommets voisins est strictement incluse dans la classe des graphes minimaux.

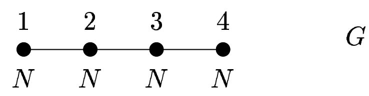

FIG. 4 – Un graphe où on ne peut pas élire sans marquer les arêtes.

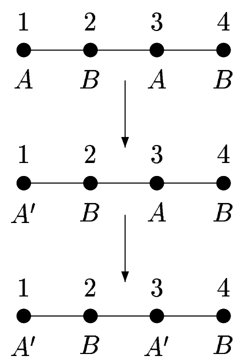

FIG. 5 – Application d'une règle ne modifiant qu'un seul sommet.

Considérons le graphe G de la Figure 4 où les numéros indiqués ne correspondent pas aux étiquettes des sommets mais permettent de les distinguer. Initialement, les quatre sommets sont dans le même état N. Pour tout système de réétiquetage sur les arêtes $\mathcal{R}$ où les arêtes ne sont pas marquées, on montre par induction qu'il existe une exécution de $\mathcal{R}$ sur G telle que les sommets 1 et 3 (respectivement 2 et 4) soient toujours dans le même état.

Initialement, tous les sommets sont dans le même état et le résultat est donc vrai. Par la suite, si on peut appliquer une règle R qui ne dépend que de l'état d'un sommet et ne modifie que ce sommet, on peut appliquer cette règle successivement aux sommets 1 et 3 comme sur la Figure 5 ou aux sommets 2 et 4, et par conséquent, la propriété reste vraie.

Si on peut appliquer une règle R' qui réécrit la paire de sommets $\{1, 2\}$, par induction, on sait que la paire de sommets $\{3, 4\}$ est dans le même état et on peut donc appliquer R' à cette paire de sommets, comme sur la Figure 6.

Si on peut appliquer une règle R'' qui réécrit la paire de sommets $\{2, 3\}$, alors puisque les sommets 1 et 3 (respectivement les sommets 2 et 4) sont dans le même état et que toutes les arêtes sont non-marquées, on peut aussi appliquer cette règle aux paires de sommets $\{1, 2\}$ et $\{3, 4\}$, et par conséquent, la propriété reste vérifiée.

Ainsi, ou bien il existe une exécution de $\mathcal{R}$ qui ne se termine pas, ou bien il existe une exécution de $\mathcal{R}$ qui termine mais il n'existe aucun sommet dont l'étiquette est unique dans la configuration finale, et par conséquent, le système de réétiquetage sur les arêtes $\mathcal{R}$ ne résout pas le problème de l'élection sur le graphe G.

En revanche, puisque le graphe G est un graphe minimal, l'algorithme présenté précédemment permet de résoudre le problème de l'énumération avec détection de la terminaison et donc de l'élection sur G. Par conséquent, s'autoriser à marquer les arêtes dans les calculs locaux sur les arêtes nous donne un modèle de calcul strictement plus puissant que lorsqu'on ne s'y autorise pas.

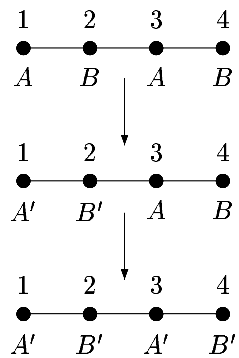

FIG. 6 – Application d'une règle modifiant les deux extrémités d'une arête.

7 Conclusion

7.1 Résultats

Les travaux d'Angluin et de Mazurkiewicz ont permis d'établir une caractérisation exacte des graphes simples dans lesquels on peut résoudre les problèmes de l'énumération et de l'élection en utilisant des calculs locaux sur les boules. L'outil principal pour établir les résultats d'impossibilité est la notion de revêtement sur les graphes simples et l'outil permettant de montrer la possibilité de résoudre ces problèmes sur les graphes $\mathcal{S}$-minimaux est l'algorithme de Mazurkiewicz. On a ici étendu la notion de revêtements aux graphes sans boucle afin de pouvoir définir la classe des graphes minimaux. On a adapté les outils existant précédemment pour caractériser quels étaient les graphes dans lesquels on pouvait résoudre les problèmes de l'énumération et de l'élection en utilisant des calculs locaux sur les arêtes. Ceci nous a par ailleurs permis de montrer que les calculs locaux sur les boules sont un modèle de calcul strictement plus puissant que les calculs locaux sur les arêtes.

7.2 Perspectives

On peut s'intéresser à d'autres modèles de calcul locaux pour déterminer quels sont les graphes dans lesquels on sait résoudre les problèmes de l'élection et de l'énumération dans ces modèles. Par exemple, on peut considérer des relations de réétiquetage localement engendrées sur les boules ou sur les arêtes telles qu'un seul sommet change d'état lorsqu'on applique une règle de réétiquetage : lors d'un pas de calcul, un sommet prend en compte l'état de tous ses voisins ou d'un seul mais modifie seulement son étiquette. À partir de l'étude de ces modèles, on peut caractériser quelles sont les hypothèses minimales que l'on peut faire sur la topologie du réseau et sur les protocoles de communication pour résoudre certains problèmes.

Dans le modèle des calculs locaux sur les boules, de nombreux résultats ont été trouvés en utilisant le puissant outil qu'est l'algorithme de Mazurkiewicz. Par exemple, des résultats sont connus sur la détection de la terminaison [MT00] et sur la caractérisation des familles de graphes sur lesquelles l'élection est possible [GM02]. Il peut être intéressant de déterminer de quelle manière ces résultats peuvent être étendus aux calculs locaux sur les arêtes.

Références

[Ang80] D. Angluin. Local and global properties in networks of processors. Dans *Proceedings of the 12th Symposium on theory of computing*, pages 82–93, 1980.

[Bon95] J. A. Bondy. Basic graph theory : paths and circuits. Dans R.L. Graham, M. Grötschel, et L. Lovász, éditeurs, *Handbook of Combinatorics, vol. I.* Elsevier, 1995.

[GM02] E. Godard et Y. Métivier. A characterization of families of graphs in which election is possible. Dans *Foundations of Software Science and Computation Structures*, volume 2303 de *Lecture notes in computer science*, pages 159–171. Spinger-Verlag, 2002.

[God02] E. Godard. *Réécritures de graphes et algorithmique distribuée.* Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2002.

[Maz97] A. Mazurkiewicz. Distributed enumeration. *Inf. Processing Letters*, 61 :233–239, 1997.

[MT00] Y. Métivier et G. Tel. Termination detection and universal graph reconstruction. Dans *International Colloquium on structural information and communication complexity*, pages 237–251. Carleton Scientific Press, 2000.

[Ros00] K. H. Rosen, éditeur. *Handbook of discrete and combinatorial mathematics.* CRC Press, 2000.

[Tel00] G. Tel. *Introduction to distributed algorithms.* Cambridge University Press, 2000.