

suof

Revue
scientifique
et technique
de la Direction
des applications
militaires

Numéro **39**
Janvier 2011

Mathématiques appliquées

cea

Les mesures expérimentales et les mathématiques

Experimental measurements and mathematics

Résumé

Les mathématiques permettent de résoudre un grand nombre de problèmes auxquels sont confrontés les expérimentateurs, depuis la phase de conception de l'expérience jusqu'à l'exploitation de la mesure. Nous présentons dans cet article des exemples de méthodes mathématiques utilisées à la DAM dans trois domaines : le traitement des données expérimentales brutes, le contrôle des objets à expérimenter et l'analyse de flots de données.

Abstract

Many problems which appear in experimental works can be solved by using mathematical methods, from the conception phase to the interpretation of measurements. We illustrate the use of these methods at CEA - DAM, by pointing out some examples in three typical domains: numerical treatment of experimental data, geometrical controls of targets, analysis of a huge quantity of data.

I. ABRAHAM, S. BRUNO,
O. DURAND, P. GAILLARD,
J.-M. LAGRANGE, F. LAMY,
J.-P. LEYRAT
CEA - DAM - Île-de-France
A. CHOUX, L. DRUOTON,
G. PASCAL, F. SULPICE
CEA - Valduc
E. BUSVELLE, L. GARNIER
Laboratoire d'électronique,
informatique et image,
université de Bourgogne,
Auxerre
J.-P. GAUTHIER
Laboratoire des sciences
de l'information
et des systèmes, Toulon
R. LANGEVIN
Institut mathématique
de Bourgogne, Dijon

Les termes spécialisés et les sigles, définis dans le glossaire en fin de numéro, apparaissent en bleu.

L'acquisition et l'analyse de données expérimentales sont une problématique constante à la DAM, qu'il s'agisse de réaliser des expériences dans le cadre du programme Simulation, de contrôler les fabrications des armes ou d'assurer la surveillance des traités de non-prolifération. Par exemple, dans le cadre des expériences de physique des armes, l'expérimentateur doit être capable de détecter des phénomènes de plus en plus fins, souvent extrêmement brefs, avec une précision sans cesse accrue, pour permettre la validation de modèles physiques prédictifs. Le recours aux mathématiques est indispensable pour répondre à ce besoin.

Parce que les problèmes auxquels est confronté l'expérimentateur sont multiples, les méthodes et outils mathématiques qui peuvent être mis à son service le sont également. Il n'est pas question, dans cet article, d'en dresser un panorama exhaustif, mais de présenter quelques exemples significatifs de développements expérimentaux dus aux mathématiques dans trois domaines typiques illustrant des problématiques auxquelles l'expérimentateur se trouve classiquement confronté : le traitement des données expérimentales brutes, le contrôle des objets fabriqués et expérimentés, et l'analyse d'un ensemble important de données.

Les mathématiques au service du traitement des données expérimentales brutes

Pour passer de la grandeur mesurable captée par un détecteur et pérennisée par un enregistreur à la donnée physique recherchée, on est amené à résoudre un problème inverse. Plusieurs méthodes mathématiques sont envisageables, et utilisées au CEA-DAM pour résoudre de tels problèmes. Nous fournissons dans ce chapitre deux exemples, relevant tous deux des expériences de détonique : l'un (déjà évoqué dans de précédents numéros de cette revue) concerne l'exploitation des clichés de radiographie éclair ; l'autre, de mise en œuvre plus récente, traite de l'accès à la distribution en tailles de particules d'un nuage de matière éjectée sous choc, en utilisant une technique de mesure par diffusion de lumière.

Outils d'optimisation en problème inverse pour la radiographie éclair

La radiographie éclair est utilisée en détonique pour étudier le comportement des matériaux soumis à la détonation d'un explosif. En particulier au CEA-DAM, l'installation AIRIX est utilisée pour radiographier des objets denses axisymétriques.

Le dispositif expérimental d'acquisition des radiographies est décrit dans [1]. À partir de la radiographie, la détermination de la densité ou des interfaces entre matériaux est obtenue par la résolution d'un problème inverse. Cela consiste à rechercher l'objet dont la radiographie théorique est la plus proche possible de la radiographie expérimentale, ce qu'on peut écrire par :

$$obj_0 = \arg \min \| Radio - proj(obj) \|^2$$

où obj_0 désigne la description de l'objet reconstruit, $proj$ l'opérateur de formation de la radiographie et $Radio$ la radiographie expérimentale.

Cependant, le problème décrit par l'équation ci-dessus est mal posé au sens de Hadamard [2] ; en particulier, la reconstruction est extrêmement sensible aux perturbations sur la donnée $Radio$. Aussi, pour stabiliser la reconstruction, nous utilisons les connaissances *a priori* disponibles sur l'objet (par exemple, son axisymétrie). Généralement, la prise en compte d'hypothèses sur la solution obtenue impose la méthode de résolution. Plusieurs approches ont été décrites dans [3], en particulier la stabilisation du problème par le choix d'une base adaptée comme les *curvelets*. Une autre approche repose sur la description par zones de la carte de densité de l'objet ; la méthode choisie pour chaque zone dépendant de sa régularité. Dans les zones les plus régulières, la densité est décrite par la solution d'une équation elliptique. Les paramètres du modèle sont alors les conditions aux limites de ces équations [3,4].

Enfin, pour éviter un bruit important sur la reconstruction, une approche plus récente consiste à se restreindre à des objets appartenant à un espace BV (espace des fonctions à variations bornées). Pour cela, à l'équation ci-dessus est ajouté un terme permettant de rechercher un objet ayant une variation totale minimale. Dans ce cadre, plusieurs méthodes de résolution peuvent être mises en œuvre [5].

Résolution du problème inverse en diffusion de la lumière par des méthodes déterministes et stochastiques

Dans le cadre des expériences de détonique menées à la DAM, il devient nécessaire de caractériser, avec une précision submicrométrique, la distribution en tailles des particules susceptibles d'être éjectées par un matériau métallique soumis à un choc très intense.

Une technique de mesure adaptée est la diffusion de la lumière : on fait interagir une onde électromagnétique (typiquement une onde laser) avec le nuage de particules et on mesure la répartition angulaire résultante de l'intensité. Le diagramme de diffusion ainsi produit dépend exclusivement de l'indice de réfraction et de la taille des particules (en supposant ces dernières parfaitement sphériques). C'est le problème direct, plus connu sous le nom de diffusion de Mie.

Le problème inverse est schématisé sur la figure 1 : à partir du diagramme de diffusion expérimental, nous cherchons à accéder à la distribution en tailles des particules. La solution retenue est celle qui, à l'issue d'un processus itératif basé sur la résolution du problème direct, permet de minimiser l'écart entre le diagramme de diffusion produit par la distribution testée et le diagramme de diffusion expérimental. La connaissance du problème direct est donc cruciale.

Deux approches sont possibles pour déterminer la distribution finale. Soit nous considérons qu'elle suit *a priori* une loi paramétrique classique, par exemple de type log-normale (LN), soit nous prenons en compte une loi quelconque.

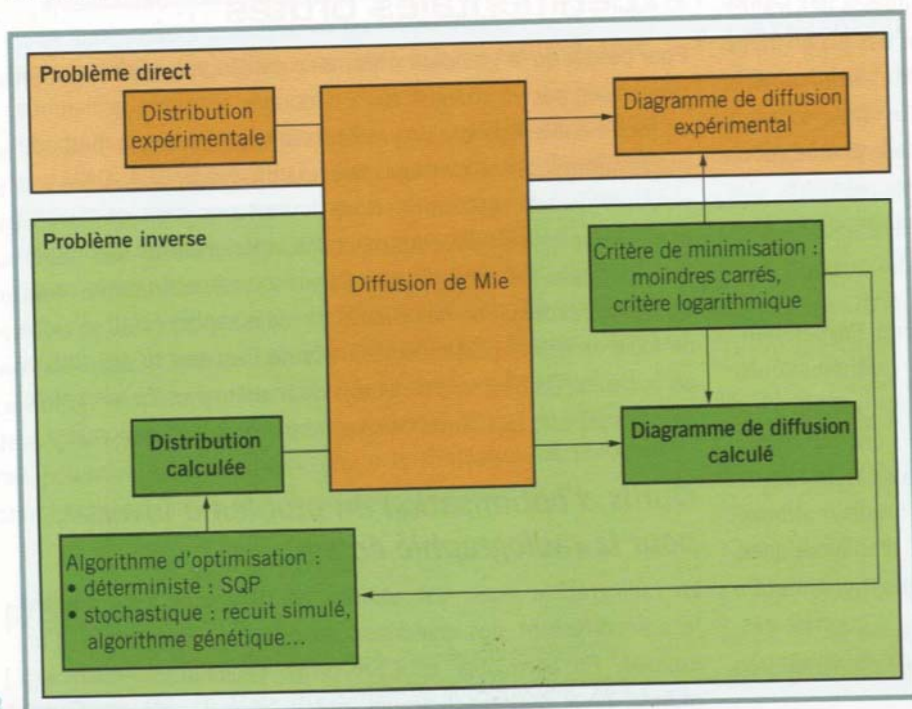


Figure 1
Principe de résolution du problème inverse.

Cas d'une loi log-normale

L'optimisation consiste à déterminer deux paramètres, μ et σ , moyenne et écart-type de la loi normale sous-jacente. La méthode d'optimisation sous contrainte SQP (programmation quadratique successive) est bien adaptée au problème ; les contraintes peuvent être linéaires ou non linéaires [6]. Dans le cas présent, le problème se formalise de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min J(\mu, \sigma) \text{ avec } J(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^{n_{\theta}} [I_{\text{calcul}}(\mu, \sigma, \theta_i) - I_{\text{exp}}(\theta_i)]^2 \\ g(\mu, \sigma) = \int_{0,1}^{10} LN(\mu, \sigma)(y) dy \geq 0,95 \\ \sigma > 0 \end{cases}$$

$I_{\text{calcul}}(\mu, \sigma, \theta_i)$ est le résultat du calcul du nombre de particules ayant l'angle caractéristique θ_i , sachant que la loi (log-normale) de la taille des particules est $LN(\mu, \sigma)$, et que θ_i représente les angles discrets du diagramme de diffusion. La première ligne traduit la minimisation de l'écart J entre les diagrammes de diffusion calculé et expérimental. Cet écart est déterminé selon un critère basé sur les moindres carrés. Un autre type de critère (par exemple logarithmique, en prenant le logarithme népérien de l'intensité) peut aussi être employé. La contrainte d'inégalité de la 2^e ligne signifie qu'au moins 95 % des particules ont leur rayon compris dans la plage 0,1 μm à 10 μm (autre *a priori* pour la distribution). La 3^e ligne concerne une inégalité sur l'écart-type qui doit rester positif.

Un des points forts de la méthode SQP réside dans le fait que, contrairement à de nombreuses méthodes qui vérifient les contraintes à chaque itération, elle n'impose le respect des contraintes que pour la solution finale. Ainsi, la progression vers la solution optimale est effectuée à partir de points intermédiaires « faisables » mais aussi « non faisables », proches du domaine des contraintes.

L'efficacité de la méthode est montrée sur les figures 2 à 4. Nous cherchons à retrouver une distribution « expérimentale » (en bleu sur la figure 2), loi log-normale de paramètres $\mu=0,5$ et $\sigma=0,44$. À cette distribution, correspond le diagramme de diffusion « expérimental » de la figure 3 (en bleu). La figure 4 montre que la méthode SQP converge vers un minimum global net $(\mu; \sigma)_{\text{calcul}} = (0,5; 0,43)$ éloigné de moins de 1% du couple (μ, σ) expérimental. Ceci se confirme en comparant les courbes expérimentales précédentes aux courbes simulées correspondantes (en rouge). Elles se superposent presque parfaitement. En présence de bruit (additif ou multiplicatif) sur le diagramme de diffusion expérimental, la méthode reste encore parfaitement valable.

Cas d'une loi quelconque

Dans le cas où il n'existe pas *a priori* sur la distribution, l'optimisation consiste à déterminer un nombre de paramètres largement supérieur aux 2 paramètres précédents.

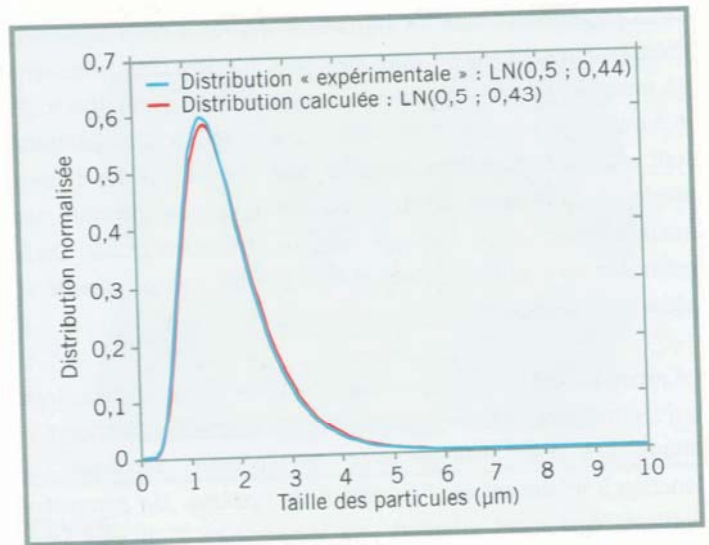


Figure 2 Superposition des lois de distribution « expérimentale » et calculée avec la méthode SQP.

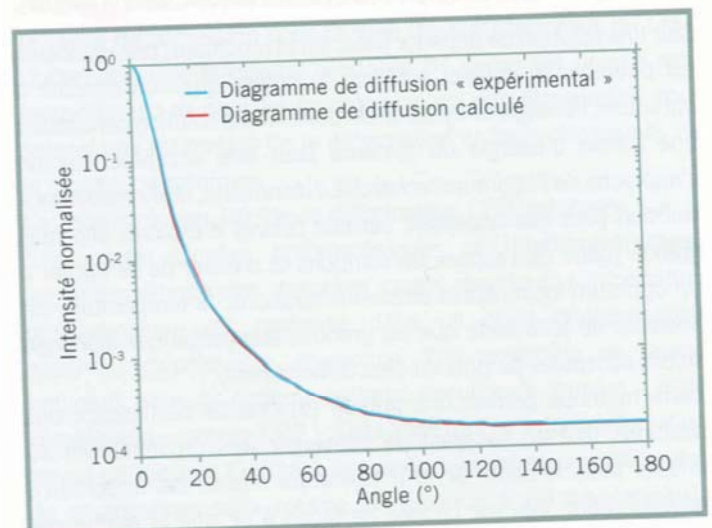


Figure 3 Superposition des diagrammes de diffusion « expérimental » et calculé.

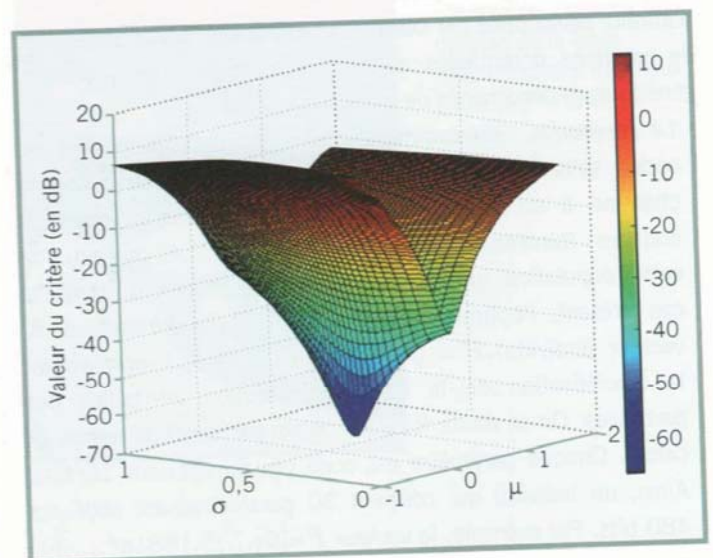


Figure 4 Valeur du critère (en dB) en fonction des couples (μ, σ) testés.

Ces « paramètres » sont les proportions discrètes constitutives de l'histogramme à estimer. Dans ce cas, il n'existe plus forcément de minimum global net comme auparavant, mais un chaos de minima locaux ; des méthodes d'optimisation stochastiques sont alors indispensables car elles sont basées sur des tirages aléatoires de vecteurs, solutions qui permettent de s'extraire des minima locaux et de converger vers un minimum global. Deux méthodes sont utilisées dans le cas présent : **recuit simulé** et **algorithme génétique**.

Le **recuit simulé** s'appuie sur l'algorithme de **Metropolis-Hastings** qui permet de décrire l'évolution d'un système thermodynamique [7]. Par analogie avec le processus physique, la fonction à minimiser est l'énergie E du système. Un paramètre fictif est également introduit : la température T . Il faut alors chercher à maximiser la nouvelle fonction $\exp(-J(x)/T)$, où x est le vecteur de paramètres à optimiser et $J(x)$, fonction à minimiser, est la valeur du critère pour ce vecteur (par exemple le critère de moindres carrés ou le critère logarithmique).

Soit une solution de départ x fixée. En la modifiant, une deuxième est obtenue. Si celle-ci améliore le critère que l'on cherche à optimiser, l'énergie du système diminue. Toute solution permettant une baisse d'énergie du système peut être acceptée, car on s'approche de l'optimum recherché. Néanmoins, une « mauvaise » solution peut être acceptée, car elle permet d'explorer une plus grande partie de l'espace de solutions et d'éviter de se limiter à un optimum local. Après plusieurs itérations, la température est abaissée de telle sorte que les grandes augmentations d'énergie soient acceptées de plus en plus difficilement.

Cette méthode permet une grande exploration de l'espace des solutions tout en essayant de converger vers un minimum du critère. Mais le choix de la température initiale est important ; généralement, elle est choisie de façon à ce que la moitié des déplacements engendrant une augmentation de l'énergie soit acceptée.

Les **algorithmes génétiques** [8] utilisent la notion de sélection naturelle développée par Darwin et l'appliquent à une population de solutions potentielles au problème donné. Un algorithme génétique se décompose de la façon suivante :

- **La génération** : on commence avec une population de base codée sous forme de chaînes de caractères correspondant chacune à un chromosome. Il existe différents types de codages (binaire, à caractère multiple). Le contenu de cette population initiale est généré aléatoirement. Dans le cas présent, l'optimisation porte sur les 30 paramètres du vecteur (individu) $F = (f_1 ; f_2 ; f_3 ; \dots ; f_{30})$ représentant la discrétisation de la loi de distribution en tailles des particules. On se limite ici à 30 objets par souci de temps de calcul. Chaque paramètre est codé (en binaire) sur 16 bits. Ainsi, un individu qui contient 30 paramètres est codé sur 480 bits. Par exemple, le vecteur $F = [0 ; \dots ; 5,1881e^{-4} ; \dots ; 1]$ est représenté par les chromosomes suivants : (0000000000000000...000000000100010...1111111111111111);

- **L'évaluation** : à chacun des individus est attribuée une note qui correspond à son adaptation au problème. Les individus sont évalués en appliquant un critère de type moindres carrés ou logarithmique entre les diagrammes de diffusion calculé et expérimental. Les individus sont classés dans un ordre décroissant selon le critère. Le meilleur se trouve en position 1 ;
- **La sélection** : une sélection des individus est effectuée en fonction de leur évaluation selon le principe de la roulette. Les meilleurs individus ont plus de chance d'être sélectionnés. Les couples ainsi formés vont se reproduire ;
- **L'enjambement ou reproduction** : lorsque deux chromosomes ont été sélectionnés, un enjambement peut être réalisé. L'enjambement consiste à échanger une partie du patrimoine respectif de deux chromosomes autour d'un site de croisement sélectionné aléatoirement. Une probabilité d'enjambement est choisie égale à 70 % ;
- **La mutation** : les chromosomes peuvent muter avec la probabilité m . Dans le cas d'un codage binaire, la mutation consiste à changer un 0 par un 1. Le site de mutation est tiré aléatoirement.

En effectuant ces différentes opérations un nombre de fois correspondant à la taille de la population divisée par deux, la nouvelle population (la 1^{re} génération) obtenue a la même taille que la population initiale, et contient globalement des solutions plus proches de l'optimum. Le principe des algorithmes génétiques est d'effectuer ces opérations un maximum de fois de manière à augmenter la justesse du résultat.

On considère que l'algorithme est convergé lorsque la valeur minimale du critère n'a pas évolué pendant 500 générations. La **figure 5** montre un exemple de résultats où la distribution calculée (ρ_{calcul}) et la distribution « expérimentale » de départ (ρ_{exp}) sont représentées respectivement en rouge et en bleu. L'écart entre ces deux lois de distribution peut être quantifié au moyen de

la distance de Hellinger $D = \sqrt{\int_0^{+\infty} (\sqrt{\rho_{exp}} - \sqrt{\rho_{calcul}})^2}$, continue ou discrète.

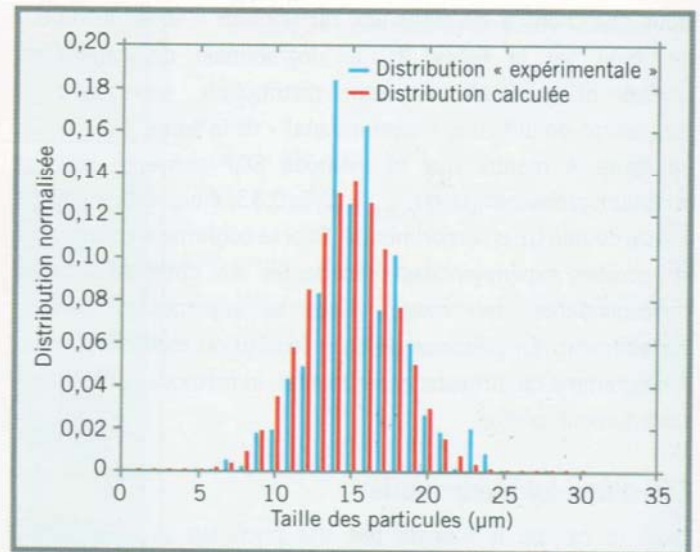


Figure 5
Superposition des lois de distribution « expérimentale » et calculée avec l'algorithme génétique.

Dans notre exemple, la distance (discrète) est de l'ordre de 29 %. Le calcul de la distribution finale nécessite un temps relativement long qui peut être réduit en augmentant progressivement le nombre de paramètres calculés de chaque individu.

Suivant la nature de la distribution recherchée, et suivant la nature du bruit de mesure, l'emploi de méthodes déterministes ou stochastiques présente donc un intérêt certain. La possibilité offerte par les méthodes stochastiques d'optimiser un « grand » nombre de paramètres peut permettre, par exemple, dans le cas d'une distribution quelconque, de s'affranchir de la méconnaissance de l'indice de réfraction des particules.

Une utilisation combinée des deux méthodes peut être mise en œuvre avec une résolution paramétrique servant d'initialisation à un algorithme de recuit simulé ou génétique.

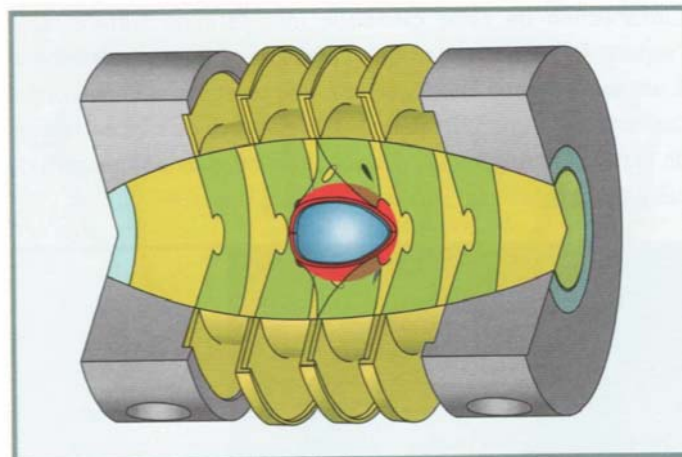


Figure 6
Cavité d'une cible à gain de type LMJ.

Les mathématiques au service de la maîtrise des édifices réalisés et expérimentés

Pour garantir la qualité de la mesure, l'expérimentateur doit naturellement maîtriser les caractéristiques et les biais induits par chacun des éléments de la chaîne de mesure : capteur (ou récepteur), système de liaison, enregistreur, logiciel de traitement du signal ou de l'image. Mais il doit, en outre, avoir la connaissance la plus parfaite possible de l'objet réel qu'il expérimente (qui, nécessairement, diffère de l'objet « idéal » initialement défini) pour s'assurer qu'il satisfait aux spécifications requises (géométrie, qualité de matériaux...), et prendre en compte, dans l'analyse des résultats expérimentaux, les éventuels écarts. L'accès à la connaissance de l'objet « vrai » est également fondamental pour la qualification des édifices fabriqués par la DAM. Là encore, les mathématiques mettent à disposition des méthodes efficaces pour garantir cette maîtrise, et nous en présentons ci-dessous deux exemples : l'une concerne les cibles à gain qui seront expérimentées sur le Laser MégaJoule (LMJ), l'autre les pièces élémentaires des édifices testés dans les expériences de détonique.

Singularités lagrangiennes et microcibles cryogéniques

Les microballons utilisés dans les cibles à gain qui seront expérimentées sur le Laser MégaJoule (LMJ) [9] sont tapissés d'une couche de DT (mélange deutérium-tritium) cryogénique lisse d'une centaine de micromètres d'épaisseur (figure 6). Les spécifications d'épaisseur et de rugosité de cette couche, indispensables pour l'atteinte de l'ignition [10], sont particulièrement sévères et nécessitent l'étude de méthodes d'observation optique, telles que l'ombroscopie et l'interférométrie.

Le microballon n'est observable que selon un seul axe de vue passant par deux fenêtres latérales et circulaires aménagées dans la cavité de conversion pour l'entrée des 240 faisceaux du LMJ. L'observation de la couche solide de DT, selon cet unique axe, fournit un jeu de données incomplètes qui doit être analysé pour obtenir une estimation de la déformation en trois dimensions de la couche cryogénique.

La reconstruction 3D de la déformation [11] est basée sur la fusion des données ombroscopiques et interférométriques, via une méthode des moindres carrés standard. L'information ombroscopique est contenue dans un objet mathématique appelé « caustique », enveloppe d'un ensemble de rayons lumineux issus du système optique « source de lumière – cible cryogénique – caméra CCD ». Cela a été mis en évidence lors d'un travail de thèse [12] durant lequel un logiciel de caractérisation de microballons sans couche cryogénique a été développé (la figure 7 donne un exemple de caustique).



Figure 7
Exemple de caustique observable, l'intersection du plan de la table avec les rayons lumineux traversant le système « verre – air – liquide ».

L'intersection de cette caustique (qui est une surface dans l'espace R^3) avec le plan du capteur de la caméra correspond à un anneau lumineux (figure 8). Cet objet monodimensionnel contient donc une information 3D relative à la surface interne de la couche cryogénique, à savoir la forme et le plan tangent de cette surface.

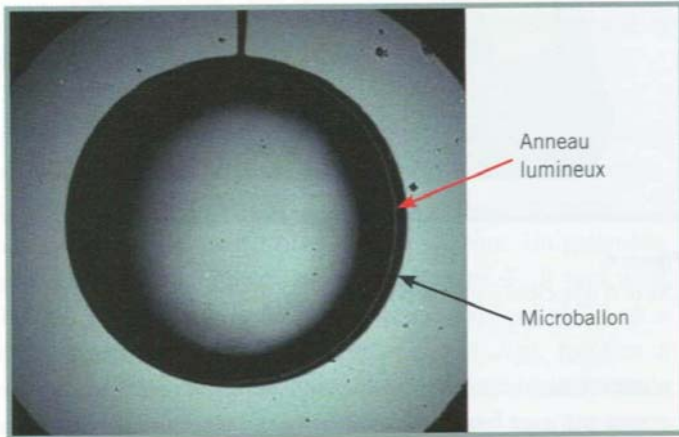


Figure 8
Image ombroscopique d'un microballon de 2,1 mm de diamètre et 30 μm d'épaisseur contenant une couche de deutérium solide.

Dans le cas idéal, l'équation de l'anneau lumineux (relatif à une couche de DT solide parfaite) peut être calculée explicitement grâce à la symétrie cylindrique du problème. Ainsi, des équations reliant l'anneau lumineux principal et la couche de DT solide centrée dans le microballon et parfaitement sphérique sont donc établies.

Dans la pratique, la couche cryogénique n'est pas parfaitement sphérique et présente des déformations. Aussi, nous modélisons cette couche à l'aide d'une technique mathématique dite de « petite perturbation ». Il s'agit d'un problème délicat de perturbation de singularité lagrangienne (ici la caustique). Dans la théorie des singularités lagrangiennes [13], nous minimisons un critère basé sur la longueur des chemins optiques. La paramétrisation des équations permet de simplifier les calculs matriciels, mais il faut encore s'assurer de l'existence d'une différentielle non nulle au premier ordre du développement limité. L'utilisation de cette technique a cependant permis de relier, au premier ordre, la perturbation $\delta(\vartheta)$ de l'anneau lumineux à la déformation $\varepsilon_1(\vartheta, \varphi)$ de la surface de la couche cryogénique ainsi qu'à la déformation $\varepsilon_2(\vartheta, \varphi)$ du plan tangent de cette surface :

$$\delta(\vartheta) = \alpha \varepsilon_1(\vartheta, \varphi) + \beta \varepsilon_2(\vartheta, \varphi)$$

où ϑ est la coordonnée polaire repérée sur l'anneau lumineux, φ la coordonnée azimutale observée sur la couche cryogénique (figure 9), α et β des coefficients spécifiques au système optique de caractérisation. On démontre que cette équation peut se formuler comme suit :

$$\delta(\vartheta) = \alpha \varepsilon(\vartheta, \varphi) + \beta \frac{\partial \varepsilon(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi}$$

avec $\varepsilon(\vartheta, \varphi)$ la déformation de la surface de couche cryogénique.

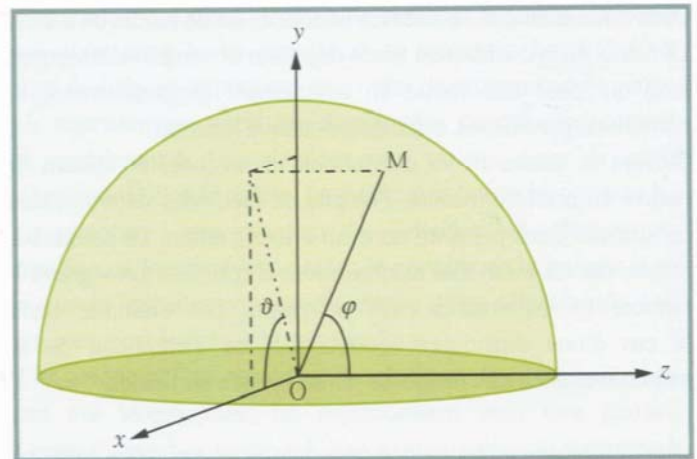


Figure 9
Coordonnées sphériques.

La reconstruction de la surface du DT solide s'effectue en la modélisant par une combinaison linéaire d'harmoniques sphériques. Mais le problème de reconstruction est mal posé, puisqu'il se peut que la déformation ne soit pas observable en considérant uniquement les clichés ombroscopiques. Il est évident que l'application, qui associe $\varepsilon(\vartheta, \varphi)$ à $\delta(\vartheta)$, n'a pas un noyau nul. Aussi, afin de contourner cette difficulté, des harmoniques sphériques sont choisies par rapport à la nature des perturbations physiquement attendues. Dans un premier temps, une partie des harmoniques sphériques est observable par ombroscopie, donc identifiée. Puis, celles non observables sont complètement déterminées en combinant les données interférométriques et ombroscopiques.

Cette démarche est implantée dans un algorithme unique utilisant la méthode des moindres carrés standard. Il est qualifié numériquement en estimant des déformations simulées connues, puis est validé expérimentalement à l'aide de mesures obtenues sur le système d'étude et de remplissage, lorsqu'une première couche cryogénique est caractérisable.

Une collaboration avec l'université de Rochester a permis de valider la méthode de détection de contour, la relation ombroscopique ainsi que l'algorithme de reconstruction de la paroi interne de la couche cryogénique.

L'analyse réalisée permet de relier l'anneau lumineux non seulement à la variation de la surface interne de la couche cryogénique (ce qu'aurait permis une étude pragmatique), mais également à la variation du plan tangent à cette surface. Ainsi, l'analyse d'un signal bidimensionnel permet d'obtenir une information tridimensionnelle. De plus, cette analyse fournit une meilleure compréhension et une meilleure fusion des données ombroscopiques, donc une reconstruction plus pertinente au vu des coefficients de corrélations.

Reconstruction 3D et optimisation de plans de contrôles dimensionnels

Le CEA-DAM est responsable du contrôle et de l'expertise des objets qu'il fabrique, des pièces élémentaires jusqu'à l'édifice fini. La caractérisation géométrique des pièces élémentaires se fait principalement à l'aide de machines de mesures tridimensionnelles (MMT) (figure 10) ; elle est complétée par des données fournies par des rugosimètres et profilomètres mécaniques ou optiques. Les MMT fournissent un nuage de points 3D représentant la pièce mesurée.



Figure 10
Machine de mesures tridimensionnelles (MMT).

Un exemple typique de pièce à contrôler est une coquille hémisphérique déformable surmontée d'une partie cylindrique (figure 11). La surface étant de révolution autour de l'axe vertical, les mesures des MMT sont effectuées selon deux directions : les méridiens (axe vertical) et les parallèles (axe horizontal).

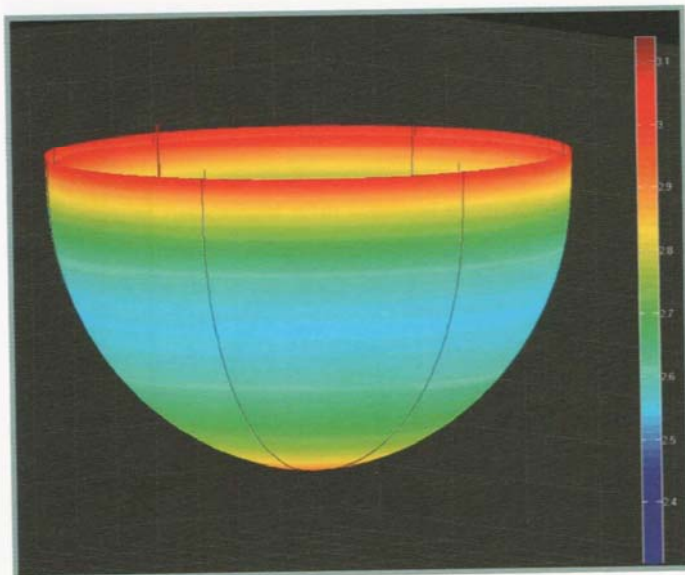


Figure 11
Visualisation 3D d'une pièce à reconstruire.

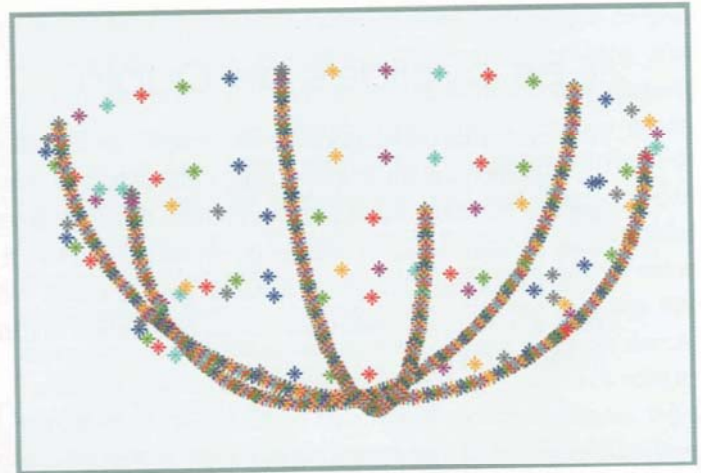


Figure 12
Définition du plan de contrôle classique : 3 parallèles / 6 méridiens.

La combinaison de ces lignes de mesures définit un plan de contrôle.

Aujourd'hui, ce plan est généralement constitué de six méridiens et de trois parallèles (figure 12), ce qui n'est pas toujours suffisant pour permettre la détection de défauts localisés tels que des « enfoncements » ou des « arrachements » de matière liés au procédé de fabrication et à la manutention : une optimisation du plan de contrôle est donc nécessaire.

Pour cela, un outil de reconstruction 3D est nécessaire. Le but est de « reconstruire » les points non mesurés à partir des informations disponibles (données mesurées, profil théorique et procédé de fabrication). Le nuage dense de points ainsi obtenu permet de simuler un grand nombre de plans de contrôle et de définir le plan optimal.

Toutefois, compte tenu des précisions de contrôle demandées, les algorithmes actuels sont insuffisants. Il est donc nécessaire de s'orienter vers une autre technique de reconstruction : on considère l'objet à reconstruire comme une enveloppe de sphères. La forme théorique de la pièce, réunion d'un cylindre et d'un hémisphère, est, comme les cyclides de Dupin quartiques, l'enveloppe d'une famille de sphères dépendant d'un paramètre particulièrement simple (encadré). De plus, les premières surfaces perturbées que l'on cherche à reconstruire sont des surfaces de révolution, elles-mêmes enveloppes de sphères à un paramètre simple ; il est donc intéressant de travailler dans l'espace des sphères, représenté par une quadrique dans R^5 [14]. Les cyclides de Dupin sont des enveloppes de sphères qui correspondent, dans l'espace R^5 , à des courbes, sections de la quadrique par un plan affine.

Il est donc naturel d'approcher toute courbe de l'espace des sphères par des réunions d'arcs des courbes précédentes, jointes de façon G^0 (les courbes coïncident au point de jointure).

Les cyclides de Dupin

Une cyclide de Dupin quartique est l'image d'un cône de révolution, d'un cylindre de révolution ou d'un tore de révolution par une inversion [20]. Cette définition permet d'introduire trois catégories de cyclides images par une inversion (figure E1) : les cyclides non dégénérées, images du tore régulier, les cyclides dégénérées avec un point singulier, images du cylindre ou du tore à collier nul, et les cyclides dégénérées avec deux points singuliers, images du cône et du tore croisé. Une cyclide de Dupin dépend de trois paramètres réels a , c et μ , qui, selon leur valeur, déterminent la catégorie de la cyclide. Elle possède deux équations implicites [21] :

$$F_y^d(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 + b^2)^2 - 4(ax - c\mu)^2 - 4b^2y^2 = 0$$

$$F_z^d(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 - b^2)^2 - 4(cx - a\mu)^2 - 4b^2z^2 = 0$$

et une équation paramétrique :

$$\Gamma_d(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} x(\theta, \psi) \\ y(\theta, \psi) \\ z(\theta, \psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu(c - a \cdot \cos\theta \cos\psi) + b^2 \cos\theta}{a - c \cdot \cos\theta \cos\psi} \\ \frac{b \sin\theta \times (a - \mu \cos\psi)}{a - c \cdot \cos\theta \cos\psi} \\ \frac{b \sin\theta \times (c \cdot \cos\theta - \mu)}{a - c \cdot \cos\theta \cos\psi} \end{pmatrix}$$

avec $b^2 = a^2 - c^2$.

Ces équations sont données dans le repère de la cyclide défini selon ses plans de symétrie. Ces derniers contiennent chacun une des deux anticoniques, lieu des centres des sphères de l'enveloppe (figure E2), et le centre de ces anticoniques définit l'origine du repère dans lequel sont données les équations précédentes.

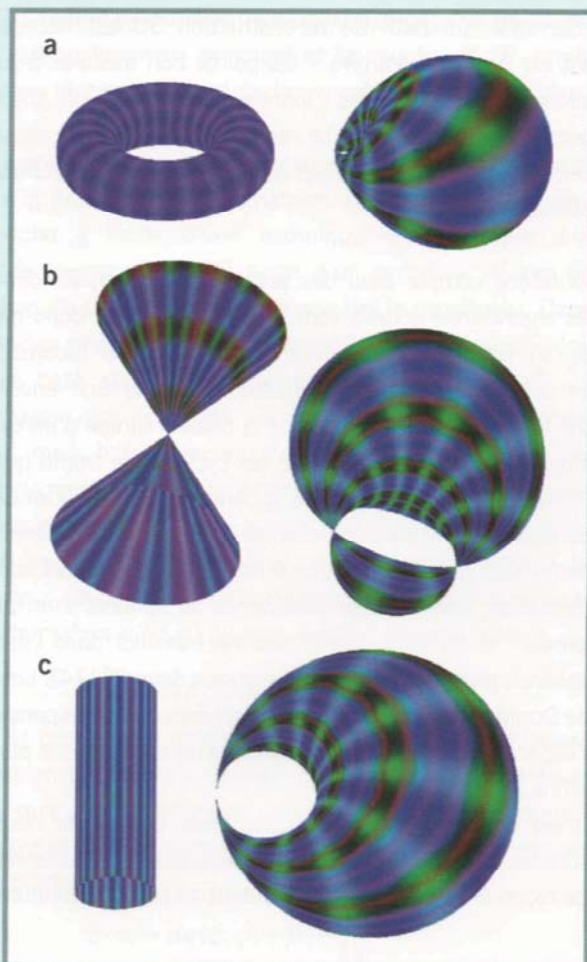


Figure E1

Les trois catégories de cyclide de Dupin.

(a) cyclide régulière, inversion de tore, (b) cyclide dégénérée avec deux points singuliers, inversion de cône, (c) cyclide dégénérée avec un point singulier, inversion de cylindre.

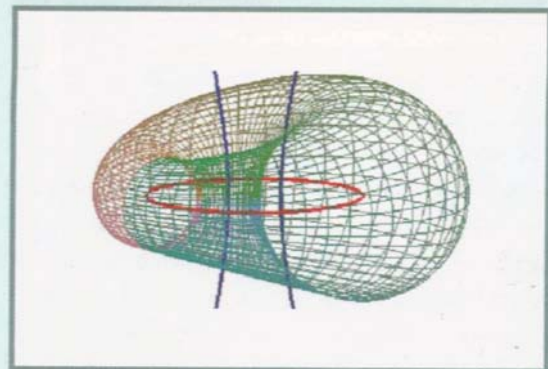


Figure E2

Les deux anticoniques d'une cyclide de Dupin.

C'est ainsi que l'on peut approcher la courbe dans l'espace des sphères correspondant à la surface de révolution à contrôler. Géométriquement, cela revient à joindre des morceaux de cyclides de Dupin tangentiellement le long de cercles particuliers (figure 13).

Cet outil de reconstruction, couplé à la connaissance des défauts types que l'on retrouve sur nos pièces, permet d'optimiser le plan de contrôle actuel.

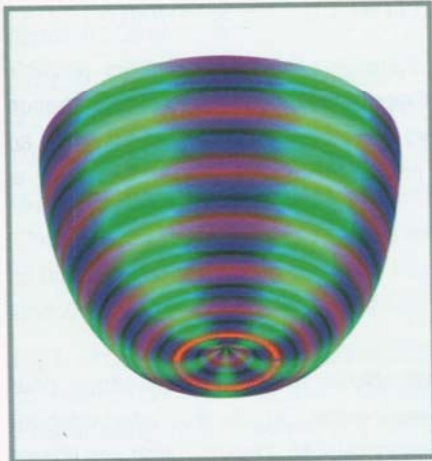


Figure 13
Partie de cyclide utilisée pour la reconstruction (jointure possible avec un autre cyclide le long du cercle orange par exemple).

Les mathématiques au service de l'analyse d'un flot de données

Dans certains cas, l'expérimentateur peut être amené à gérer et analyser un nombre très important de données en un temps limité. C'est en particulier le cas des données nécessaires à la détection d'éventuelles explosions nucléaires. Seules des méthodes statistiques, associées à des moyens informatiques performants, permettent une analyse rapide et efficace de ce flot de données. C'est le thème de cette section.

Classification automatique de détection d'infrasons

Le CEA-DAM est en charge de la détection des explosions nucléaires, et notamment d'un éventuel essai aérien à partir de l'analyse de données infrasonores recueillies sur l'ensemble du globe [15]. La recherche d'un niveau de surveillance toujours accru se traduit par une constante augmentation des données collectées. L'exploitation complète par les seuls analystes est aujourd'hui impossible, mais les méthodes d'apprentissage statistique constituent un outil efficace pour extraire, analyser et exploiter toutes les informations contenues dans ces données. De manière générale, l'apprentissage statistique regroupe l'ensemble des méthodes ayant pour objectif de mettre à jour les connaissances qui peuvent être cachées dans les bases de données, à l'aide de statistiques sur les données observées [16].

Un problème classique de l'apprentissage automatique consiste à considérer qu'un ensemble d'observations provient d'un nombre de groupes inconnus *a priori* que l'on souhaite retrouver. À titre d'exemple, les perturbations acoustiques que génère un essai nucléaire aérien peuvent être enregistrées à l'aide de microbaromètres. Ces perturbations sont des ondes sonores basse fréquence qui ont l'avantage de pouvoir être enregistrées et détectées à très grande distance de l'explosion. Mais d'autres phénomènes génèrent également des infrasons pouvant être enregistrés par le réseau de capteurs ; il peut s'agir de sources naturelles (volcans, houle océanique...) ou anthropiques (torchères, certaines usines...). Les méthodes statistiques, telles que les modèles de mélanges, permettent de regrouper puis filtrer les détections issues de ces perturbateurs, ce qui rend l'analyse des données plus aisée.

Supposons que l'on observe une série de N détections d'infrasons $X = \bigcup_{i=1}^N x_i$, chaque détection x_i étant un vecteur

multidimensionnel caractérisant la détection (son azimut – ou direction d'arrivée –, son angle d'élévation, sa fréquence...) (figure 14). Nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle de mélange gaussien [17]. Nous supposons que chaque détection est répartie parmi k groupes, et que chacun d'entre eux est caractérisé par des paramètres x qui suivent une loi normale multidimensionnelle $g(x|\mu_k, \Sigma_k)$ de moyenne μ_k et dont la matrice de covariance vaut Σ_k .

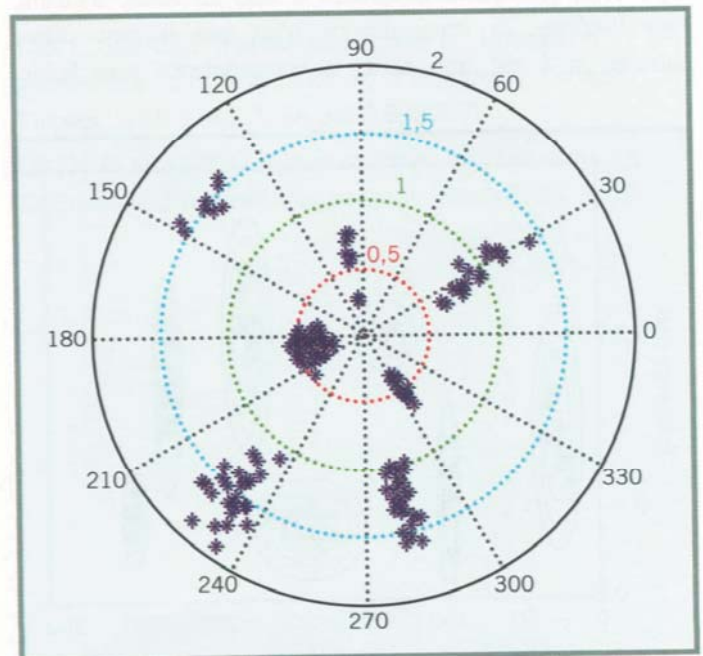


Figure 14
Ensemble de détections représentées dans un diagramme polaire. L'angle correspond à l'azimut de la détection et le rayon à sa fréquence. On cherche à regrouper de manière homogène les détections. On suppose ensuite que chaque groupe correspond à une seule source.

Si π_k est la probabilité qu'une observation soit issue du groupe k , alors la loi de probabilité d'une observation x_i est :

$$p(x_i | \Theta) = \sum_{k=1}^K \pi_k g(x_i | \mu_k, \Sigma_k)$$

où $\Theta = \bigcup_{k=1}^K \{\pi_k, \mu_k, \Sigma_k\}$ représente l'ensemble des paramètres du modèle. Nous recherchons donc les valeurs de Θ telles que les données soient correctement représentées par ce modèle de mélange. Pour les estimer, nous faisons appel à l'algorithme EM (pour Estimation-Maximisation) [18].

Étant donné l'ensemble d'observations $X = \bigcup_{i=1}^N x_i$, le nombre de groupes k étant fixé, les paramètres de Θ optimaux sont ceux qui maximisent la vraisemblance $L(\Theta | X) = \prod_{i=1}^N p(x_i, \Theta)$.

L'algorithme EM alterne deux étapes :

- dans un premier temps, l'appartenance d'une observation au groupe k est estimée par la probabilité *a posteriori*

$$p(k | x_i) = \frac{\pi_k g(x_i | \mu_k, \Sigma_k)}{p(x_i)} ;$$

- dans un second temps, les paramètres de chaque groupe (μ_k, Σ_k) sont modifiés à partir de ces probabilités de sorte que la vraisemblance du modèle s'en trouve améliorée.

Ces deux étapes sont répétées jusqu'à ce que les paramètres du modèle convergent vers des valeurs stables.

Pendant, le nombre de groupe k est, lui aussi, inconnu. Pour l'estimer, la vraisemblance n'est pas le bon critère puisque, si k est trop petit, la vraisemblance sera faible.

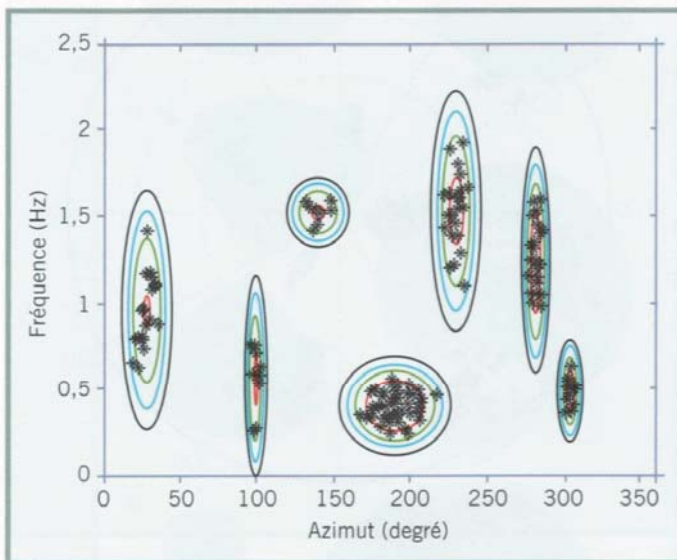


Figure 15
Mêmes détections que celles de la figure 14 dans le plan azimut / fréquence.

Un modèle de mélange gaussien optimisé par l'algorithme EM, et dont le nombre de groupes est choisi avec le critère BIC, permet de retrouver automatiquement les 7 groupes de détection attendus. Les courbes représentent les lignes de niveaux des densités gaussiennes.

À l'inverse, si l'on recherche uniquement à maximiser la vraisemblance, celle-ci est maximale lorsque le nombre de groupes est égal au nombre de données, ce qui n'est pas satisfaisant. Il s'agit donc de sélectionner un modèle qui réalise un bon compromis entre une forte vraisemblance et peu de groupes (figure 15).

Une approche consiste à maximiser un critère de vraisemblance pénalisée, comme le critère Bayesian Information Criterion (BIC) [19] :

$$BIC(\Theta | X) = \log(L(\Theta | X)) - \frac{card(\Theta)}{2} \log(N).$$

Une fois le modèle de mélange calculé, il est alors possible d'estimer la probabilité d'appartenance d'une détection à chacun des groupes. Il suffit alors d'attribuer chaque observation x_i au groupe k pour lequel la probabilité *a posteriori* $p(k | x_i)$ est la plus grande.

Conclusion

De tout temps, les mathématiques ont été indispensables pour garantir la qualité des expériences (et de leur interprétation) dont le CEA-DAM a la responsabilité. Depuis l'arrêt des essais nucléaires français en 1996, les exigences de la simulation nécessitent la mise en œuvre de diagnostics de plus en plus nombreux et divers, permettant de détecter des signaux de plus en plus fins dont on doit extraire le maximum d'informations avec une précision accrue. Les progrès récents des techniques mathématiques, en mettant à la disposition de l'expérimentateur des méthodes et outils nouveaux et sophistiqués, contribuent largement à relever ce défi.

Parce qu'elles interviendront dans des domaines de plus en plus variés de l'expérimentation, les mathématiques constitueront, pour les projets d'expériences, un partenaire dont le « poids » est appelé à croître. Le nécessaire dialogue entre le physicien expérimentateur et le mathématicien devra être demain encore plus fécond, et cela leur imposera de développer des compétences croisées dans des disciplines désormais étroitement imbriquées.

Références

- [1] I. ABRAHAM *et al.*, "La mesure en détonique – R & D en radiographie éclair", *chocs*, **38**, p. 18-28 (2010).
- [2] L. BLANC-FERAUD, *Sur quelques problèmes inverses en traitement d'images*, Mémoire HDR, université de Sophia-Antipolis (2000).
- [3] I. ABRAHAM, R. ABRAHAM, J.-M. LAGRANGE, F. LAVALLOU, "Méthodes inverses pour la reconstruction tomographique X mono vue", *chocs*, **31**, p. 6-14 (octobre 2005).
- [4] J.-M. LAGRANGE, *Reconstruction tomographique à partir d'un petit nombre de vues*, Thèse de l'École normale supérieure de Cachan (1998).
- [5] I. ABRAHAM, R. ABRAHAM, M. BERGOUGNIOUX, "An active curve approach for tomographic reconstruction of binary radially symmetric objects", *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, ENUMATH, Austria (2007).
- [6] J. STOER, "Principles of sequential quadratic methods for solving nonlinear programs", *Computational Mathematical Programming*, K. Schittkowski ed., NATO ASI series, **15**, Springer-Verlag, Berlin, Germany (1985).
- [7] S. KIRKPATRICK, C. D. GELATT, M. P. VECCHI, "Optimization by Simulated Annealing", *Science*, **220**, 4598, p. 671-680 (1983).
- [8] M. YE, S. WANG, Y. LU, T. HU, Z. ZHU, Y. XU, "Inversion of particle-size distribution from angular light-scattering data with genetic algorithms", *Applied Optics*, **38**, 12 (1999).
- [9] P. BACLET, "Recherche et développement pour les cibles cryogéniques", *chocs*, **30**, p. 15-23 (2004).
- [10] J. D. LINDL, "Inertial Confinement Fusion", Springer (1998).
- [11] A. CHOUX, *Commande optimale d'un système de conformation cryogénique d'une couche solide d'isotopes de l'hydrogène dans un microballon par chauffage infrarouge*, Thèse de l'université de Bourgogne (2006).
- [12] F. LAMY, *Mesure par méthodes optiques de l'épaisseur et de la rugosité d'une couche solide de DT solide conformée dans un microballon*, Thèse de l'université de Bourgogne (2003).
- [13] V. I. ARNOLD, A. VARCHENKO, S. GOUSSEIN-ZADE, *Singularités des applications différentiables. I : Classification des points critiques, des caustiques et des fronts d'onde*, Éditions Mir, Moscou (1986).
- [14] R. LANGEVIN, P. G. WALCZAK, "Conformal geometry of foliations", *Geom. Dedicata*, **132**, p. 135-178 (2008).
- [15] A. LE PICHON, J. VERGOZ, P. HERRY, L. CERANNA, "Analysing the detection capability of infrasound arrays in Central Europe", *J. Geophys. Res.*, **113**, D12115 (2008).
- [16] J.-D. MULLER *et al.*, "Analyse d'événements sismiques par intelligence artificielle", *chocs*, **31**, p. 68-77 (2005).
- [17] G. McLACHLAN, D. PEEL, *Finite Mixture Models*, J. Wiley eds. (2000).
- [18] A. P. DEMPSTER *et al.*, "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm", *J. Roy. Stat. Soc. Series B (Methodologica)*, **39** (1), p. 1-38 (1977).
- [19] G. SCHWARTZ, "Estimating the dimension of a model", *Annals of Statistics*, **6**(2), p. 461-464 (1978).
- [20] L. GARNIER, *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*, Ellipses, ISBN 978 2 7298 3412 8 (2007).
- [21] A. R. FORSYTH, *Lecture on Differential Geometry Of Curves and Surfaces*, Cambridge University Press, 1912.