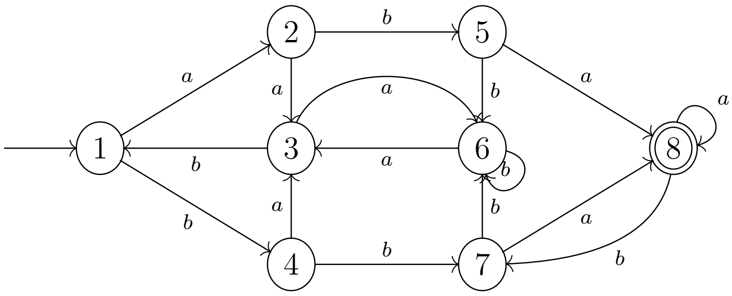
Université de Provence | LST 2ème année

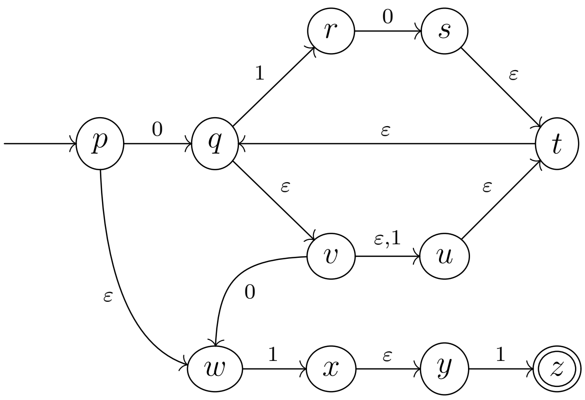
Langages et Automates
Examen du 25 mai 2011

Durée : 2h - Poly de cours autorisé.
Les 4 exercices sont indépendants.

1. Minimisation. Minimisez l'automate suivant et dessinez le graphe de l'automate minimal obtenu.



2. Déterminisation. Soit $\mathcal{A}$ l'automate non déterministe suivant :



(a) Donnez la table de transition de $\mathcal{A}$ et calculer l'ε-clôture de chaque état.

(b) Déterminez un automate $\mathcal{A}_1$ équivalent à $\mathcal{A}$ et ne comportant aucun cycle vide. On donnera la table et le graphe de transition de $\mathcal{A}_1$. (Un cycle vide doit être renommé selon le nom du plus petit état, pour l'ordre alphabétique, qui y participe.)

(c) Déterminez un automate $\mathcal{A}_2$ équivalent à $\mathcal{A}$ et ne comportant aucune ε-transition. Vous donnerez la table et le graphe de transition de $\mathcal{A}_2$.

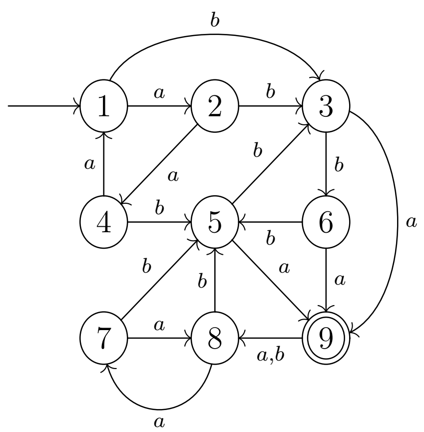
(d) Construisez un automate *déterministe* $\mathcal{A}_3$ équivalent à $\mathcal{A}$. Donnez sa table et son graphe de transition.

3. Critères de régularité. Étant donnés deux mots u et x, on note $|u|_x$ le nombre d'occurrences du mot x dans le mot u. Par exemple : $|1011|_{11} = 1$ et $|attototo|_{toto} = 2$.

(a) Prouvez que le langage $\{w \in \{a,b\}^* \;:\; |w|_{ab} = |w|_{ba}\}$ est régulier.

(b) Prouvez que le langage $\{w \in \{a,b\}^* \;:\; |w|_a = |w|_b\}$ n'est pas régulier.

4. Congruences. On considère l'automate déterministe $\mathcal{A}$ suivant :



Sur l'ensemble $Q = \{1, 2, \ldots, 9\}$ des états de $\mathcal{A}$, on définit une relation binaire $\sim$ en posant, pour tous $p, q \in Q$: $p \sim q$ si, et seulement si

$$p, q \in \{1,2,4\} \text{ ou } p, q \in \{3,5,6\} \text{ ou } p, q \in \{7,8\} \text{ ou } p, q \in \{9\}.$$

(a) Montrez que $\sim$ est une congruence sur $\mathcal{A}$.

(b) Dessinez le graphe de l'automate quotient $\mathcal{A}/\sim$.

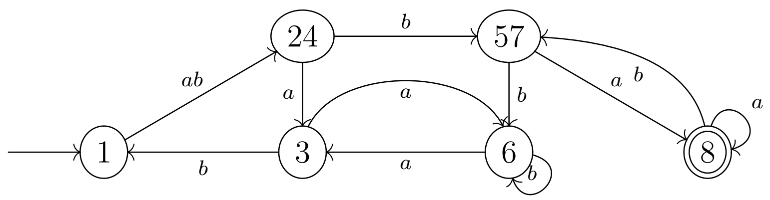
(c) La relation $\sim$ est-elle la congruence de Nerode ?

Langages et Automates

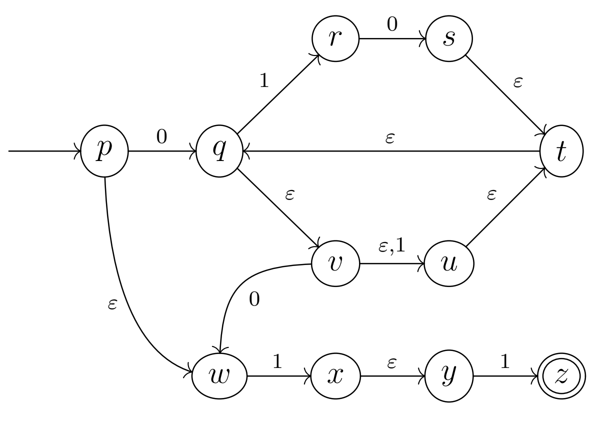
Corrigé de l'examen du 25 mai 2011

1. Minimisation.

$\equiv_0$ [1,2,3,4,5,6,7] ; [8] ([1,...,7] et [8] sont séparés par ε).
$\equiv_1$ [1,2,3,4,6] ; [5,7] ; [8] ([1,2,3,4,6] et [5,7] sont séparés par a).
$\equiv_2$ [1,3,6] ; [2,4] ; [5,7] ; [8] ([1,3,6] et [2,4] sont séparés par b).
$\equiv_3$ [1] ; [3,6] ; [2,4] ; [5,7] ; [8] ([1] et [3,6] sont séparés par a).
$\equiv_4$ [1] ; [3] ; [6] ; [2,4] ; [5,7] ; [8] ([3] et [6] sont séparés par b).
$\equiv_4 = \equiv_5$ d'où $\equiv = \equiv_4$.



2. Déterminisation. Soit $\mathcal{A}$ l'automate non déterministe suivant :



(a)

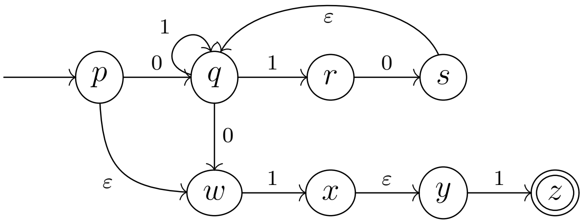
	0	1	ε	ε-clôtures
p	q		w	pw
q		r	v	$qtuv$
r	s			r
s			t	$qstuv$
t			q	$qtuv$
u			t	$qtuv$
v	w	u	u	$qtuv$
w		x		w
x			y	xy
y		z		y
z				z

Un cycle vide, composé des 4 états ayant même ε-clôture : q, t, u, v.

(b)

	0	1	ε	ε-clôtures
p	q		w	pw
q	w	qr	v	q
r	s			r
s			q	qs
w		x		w
x			y	xy
y		z		y
z				z

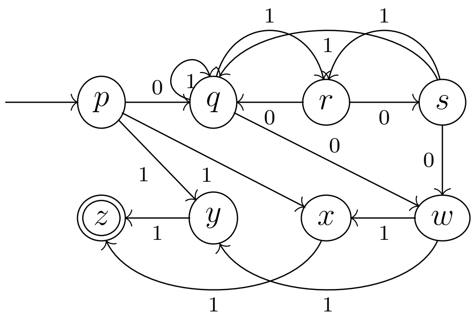
$\mathcal{A}_1$:



(c)

	0	1
p	q	xy
q	w	qr
r	sq	
s	w	qr
w		xy
x		z
y		z
z		

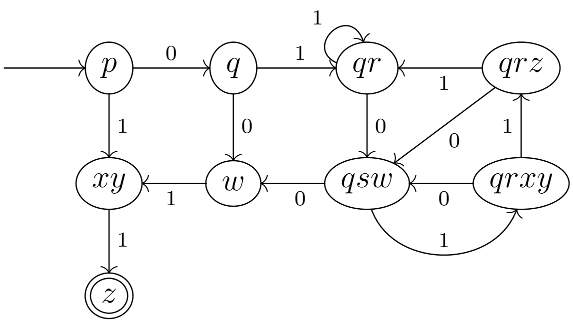
$\mathcal{A}_2$:



(d)

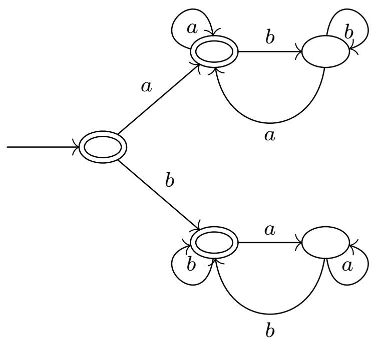
	0	1
(p)	q	xy
(q)	w	qr
r	sq	
s	w	qr
(w)		xy
x		z
y		z
(z)		
(xy)		z
(qr)	qsw	qr
(qsw)	w	$qrxy$
$(qrxy)$	qsw	qrz
(qrz)	qsw	qr

$\mathcal{A}_3$:



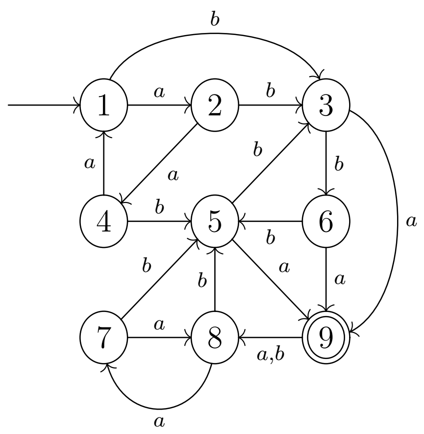
3. Critères de régularité.

(a) Ce langage est régulier, puisque reconnu par l'automate :



(b) Si $L = \{w \in \{a,b\}^* \ : \ |w|_a = |w|_b\}$ était régulier, $L \cap a^*b^*$ le serait aussi, par fermeture de REG pour la complémentation. Or $L \cap a^*b^* = \{a^nb^n, n \geq 0\}$, qui n'est pas régulier.

4. Congruences. On considère l'automate déterministe $\mathcal{A}$ suivant :



Sur l'ensemble $Q = \{1, 2, \dots, 9\}$ des états de $\mathcal{A}$, on définit une relation binaire $\sim$ en posant, pour tous $p, q \in Q$: $p \sim q$ si, et seulement si

$$p, q \in \{1, 2, 4\} \text{ ou } p, q \in \{3, 5, 6\} \text{ ou } p, q \in \{7, 8\} \text{ ou } p, q \in \{9\}.$$

(a) On se reporte à la définition 31 du cours.

(i) $\sim$ est clairement une relation d'équivalence, dont les classes correspondent aux ensembles de la partition de Q qui définit $\sim$.

(ii) $\sim$ est compatible avec δ : pour tout $p \in \{1, 2, 4\}$ on a $\delta(p, a) \in \{1, 2, 4\}$ et $\delta(p, b) \in \{3, 5, 6\}$. Ce que l'on notera :

$$\{1, 2, 4\} \xrightarrow{a} \{1, 2, 4\} \text{ et } \{1, 2, 4\} \xrightarrow{b} \{3, 5, 6\}$$

De même on a :

$$\{3, 5, 6\} \xrightarrow{a} \{9\} \text{ et } \{3, 5, 6\} \xrightarrow{b} \{3, 5, 6\}$$

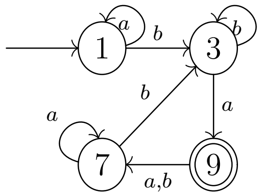
$$\{7, 8\} \xrightarrow{a} \{7, 8\} \text{ et } \{7, 8\} \xrightarrow{b} \{3, 5, 6\}$$

$$\{9\} \xrightarrow{a} \{7, 8\} \text{ et } \{9\} \xrightarrow{b} \{7, 8\}$$

Il s'ensuit facilement : $p \sim q \Rightarrow (\delta(p, a) \sim \delta(q, a)$ et $\delta(p, b) \sim \delta(q, b))$.

(iii) Enfin, $\sim$ sature F : l'assertion $p \sim q$ entraîne clairement $p \in F$ ssi $q \in F$, puisque $F = \{9\}$.

(b) Automate $\mathcal{A}/\sim$:



(c) La relation $\sim$ n'est pas la congruence de Nerode, car dans ce cas, $\mathcal{A}/\sim$ serait minimal. Ce qui n'est pas puisque $1 \equiv 7$.