UNIVERSITE DE BOURGOGNE
UV8: Probabilités et Statistiques
Fiche de TD n°6

1. Une salle de restaurant contient au plus 75 places. Parmi 100 personnes qui réservent, 80 viennent en moyenne.

   (a) Si 90 clients réservent, à combien peut-on estimer la probabilité que 75 clients au plus se présentent ?

   (b) Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations au plus pour que la probabilité qu'il se présente au plus 75 personnes soit au moins 0,9 ?

2. Soient X_i des *var* de loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi de $W = \sup X_i$? de $Z = \inf X_i$? Quelle est la loi du couple (Z, W) ? Quel est le coefficient de corrélation de W et Z ?

3. On considère un vecteur aléatoire gaussien $X = (Z, X_1, \ldots, X_n)$ dont chaque composante est de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et vérifiant

$$\rho(Z, X_i) = \alpha,\ \rho(X_i, X_j) = \alpha^2,\ 0 < \alpha < 1,$$

   pour i et j distincts. Trouver la loi de probabilité de ce vecteur.

4. Soit X de loi $\gamma(a,p)$. Quelle est la loi limite, si elle existe, de $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ lorsque $a \to \infty$, p restant fixe ?

5. On considère $U_n,\ n \geq 1$, de loi discrète $p\delta_1 + q\delta_{-1},\ p + q = 1$. On définit $V_k = U_1 U_2 \ldots U_k$ pour k compris entre 1 et n. On suppose les U_i indépendantes.

   (a) Calculer $E(V_k)$ et en déduire sa loi.

   (b) Montrer qu'en général la loi de V_n converge vers une loi qu'on notera V.

   (c) Dans ce cas général, la suite V_n converge-t-elle en probabilité vers V ?

   (d) Etudier les cas particuliers.

6. On donne un échantillon sous forme de tableau :

Classe	$7,5 - 12,5$	$12,5 - 17,5$	$17,5 - 22,5$	$22,5 - 27,5$
Effectif	3	6	4	1

   (a) Donner l'histogramme et l'histogramme cumulé.

   (b) Quelle est la classe médiane ? Quelle est la valeur médiane ?

7. Soient $X_i,\ 1 \leq i \leq n$ des *var iid* d'espérance μ. Soit $k = [n/2]$. Parmi les estimateurs suivants, lesquels sont non biaisés ?

$$X_1,\ X_k,\ \frac{X_1 + X_k + X_n}{2},$$
$$X_1 - X_k + X_n,\ \frac{2X_1 - X_k + 2X_n}{3}, S_k/k.$$

   (a) Parmi les non biaisés, lesquels sont convergents ?

   (b) Lorsque $n = 2$, calculer explicitement l'estimateur non biaisé de l'écart-type.

8. Intervalle de confiance de $E(X)$ si $n \geq 30$ et $1 - \alpha = 0,95$. Si $n = 800$ et la moyenne observée est $\bar{x} = 0,52$, quel est l'intervalle de confiance pour le même α ?

9. Soit un échantillon de taille n et de loi $\mathcal{N}(m, \sigma), m,\ \sigma$ étant inconnus.

   (a) Quel est le moment d'ordre k de $S = \dfrac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}$ où $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$?

(b) En déduire que

$$\left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2}+k)} E(S^k)$$

est un estimateur de σ^{2k}.

(c) Vérifier qu'il est non biaisé.

10. On suppose que l'on cherche à estimer un paramètre $\theta \in \Theta$ à partir d'une réalisation (un *échantillon*) $x_1, \ldots, x_n$ de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de même loi $d\mathbb{P}_\theta = f_\theta(x)\, d\lambda(x)$. On propose l'approche générale suivante: choisir $\widehat{\theta}$ qui maximise $f_\theta(x_1, \ldots, x_n)$: c'est l'*estimateur du maximum de vraissemblance* (MV dans la suite).

    (a) Calculer l'estimateur du MV de la moyenne et de la variance dans le cas gaussien.

    (b) On se place dans le cas où la loi paramétrée est la loi uniforme sur $[0, \theta]$

        i. Calculer l'estimateur du MV de θ.

        ii. En déduire un estimateur sans biais de θ.

        iii. Donner un intervalle de confiance à 95% quand $n = 10$.

11. Dans un processus de fabrication on obtient, par laminage de lingots dont le poids ne peut être exactement contrôlé, des barres d'acier dont la longueur X fluctue entre certaines limites et constitue une variable aléatoire. Soit $f_m(x)$ la densité de probabilité de cette variable , où m est un paramètre égal à la valeur moyenne (espérance mathématique) de X. On désire obtenir des barres dont la longueur soit exactement égale à une valeur L. On tronçonne donc celles qui sont plus longues à la valeur voulue L, perdant ainsi la longueur $X - L$. On rebute celles qui sont plus courtes que L, erdant ainsi la longueur X.

    (a) Ecrire l'expression de l'espérance mathématique de la longueur perdue Y.

    (b) On suppose que la loi de distribution de X est normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $\frac{m}{\sigma}$ grand. Supposant connus σ et L, écrire l'équation donnant la valeur m_0 de m qui rend minimum la longueur moyenne perdue $E[Y]$, valeur sur laquelle il conviendra donc de régler la production des barres.

    (c) On pose $\frac{L}{\sigma} = a$ et $\frac{m}{\sigma} = u$. Montrer que la valeur optimum de u, soit u_0, est donnée par

$$u_0 = a + \sqrt{2 \ln \frac{a}{\sqrt{2\pi}}}$$

    (d) Calculer m_0 sachant que $L = 2\,\mathrm{m}$ et $\sigma = 2\,\mathrm{cm}$.