UNIVERSITE DE BOURGOGNE
UV8: Probabilités et Statistiques
Fiche de TD no 5

1. Calculer les fonctions caractéristiques des variables aléatoires discrètes dans les cas suivants:

   (a) $X = a \quad p.s.$ (*rep.* e^{ita})

   (b) $P\{X = k\} = p_k \quad k \in \mathbb{N}$ (*rep.* $\sum \mathrm{e}^{itk} p_k$)

   (c) $X \sim \mathcal{B}(p)$ (*rep.* $p\mathrm{e}^{it} + 1 - p$)

   (d) $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ (*rep.* $\left(p\mathrm{e}^{it} + 1 - p\right)^n$)

   (e) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (*rep.* $\mathrm{e}^{\lambda\left(\mathrm{e}^{it}-1\right)}$)

2. Calculer les fonctions caractéristiques des lois continues suivantes:

   (a) $\mathcal{U}([-a, a])$ où $a > 0$ (*rep.* $\frac{\sin(at)}{at}$)

   (b) Exponentielle: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}_{[0,+\infty[} \boldsymbol{I}(x)$ (*rep.* $\frac{\lambda}{\lambda - it}$)

   (c) Exponentielle symétrique: $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$ (*rep.* $\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}$)

   (d) Cauchy: $f(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)}$ (*rep.* $\mathrm{e}^{-\lambda|t|}$, *on peut utiliser le résultat précédent*)

   (e) $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (*rep.* $\mathrm{e}^{itm}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$)

   (f) $\gamma(a, \lambda)$ (*rep.* $\left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$)

3. Soit X et Y deux v.a.r. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ. Calculer la fonction caractéristique de $X - Y$. Conclusion ?

4. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{U}([-1, 1])$ et notons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \text{ et } Z_n = \frac{1}{n} S_n$$

   On notera φ_n et Φ_n les fonctions caractéristiques de S_n et Z_n respectivement.

   (a) Montrer que la densité de S_n est donnée par

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \cos tx \, dt$$

   (b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \Phi_n(t)$. Conclusion ?

5. Une v.a. X est dite de Cauchy de paramètre λ (> 0) si elle suit la loi de densité

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)}$$

   (a) Montrer que si X et Y sont deux v.a. de Cauchy indépendantes de paramètres respectifs λ et μ, $X + Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre $\lambda + \mu$.

   (b) Montrer que si X est de Cauchy de paramètre λ, et si $\alpha > 0$, αX est de Cauchy de paramètre $\alpha\lambda$. En particulier, montrer que $2X$ a la même loi que la somme de deux v.a. de Cauchy indépendantes et de même paramètre.

   (c) Montrer que si X et Y sont indépendantes et de Cauchy de même paramètre λ, $\frac{X+Y}{2}$ a même loi que X et Y.

   (d) Soient $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $T \sim \mathcal{N}(0, \overline{\sigma}^2)$ indépendantes. Montrer que $\frac{Z}{T}$ est de Cauchy.

   (e) Montrer que si X et Y sont deux v.a. indépendantes de même loi symétrique, telles que pour tous α, $\beta > 0$, $\alpha X + \beta Y \sim (\alpha + \beta) X$ alors

      i. soit X et Y sont constantes $p.s.$

ii. soit X et Y sont de Cauchy

6. Soit X et Y deux v.a.r. i.i.d. de loi μ centrées de carré intégrable. On note σ^2 leur variance. Chercher toute les lois μ telles que si X et Y suivent la loi μ, $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ suit la loi μ.

7. (a) Montrer que si X est une v.a.r. telle que sa fonction caractéristique $\varphi(t)$ vérifie

$$\exists t_0 \neq 0 \qquad |\varphi(t_0)| = 1$$

alors X prend *p.s.* ses valeurs dans une progression arithmétique.

(b) Réciproque ?

(c) Donner un exemple de variable aléatoire discrète telle que

$$\forall t_0 \neq 0 \qquad |\varphi(t_0)| < 1$$

8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. i.i.d. sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de fonction caractéristique φ. Soit N une v.a. discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonction génératrice ψ (*i.e.* $\psi(t) = \mathrm{E}\left[t^N\right]$). On définit la v.a.r. Z par

$$Z(\omega) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega) \text{ si } N(\omega) \geq 1 \\ 0 \text{ si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

Calculer la fonction caractéristique Φ de Z.

9. **Théorème de Cantelli.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. i.i.d. telles que $\mathrm{E}[X_1] = 0$ et $\mathrm{E}\left[X_1^4\right] < +\infty$.

(a) Montrer que $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \to 0$ *p.s.* sans utiliser la loi forte des grands nombres.

(b) Montrer que si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont plus de même loi (mais centrées quand même) et que $\mathrm{E}\left[X_n^4\right]$ reste borné uniformément, le résultat reste vrai.

10. Soit X une v.a.r. et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de v.a.r.

(a) Montrer que

$$\begin{aligned}\left\{(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } X\right\} &= \bigcup_{\varepsilon\in]0,+\infty[} \limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\} \\ &= \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \limsup_n \left\{|X_n - X| > \frac{1}{p}\right\}\end{aligned}$$

(b) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers X si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$.

(c) Montrer que si, pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_n P(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement vers X.

11. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) d\lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$$

où f est une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (*Indication: on pourra se ramener au calcul d'une espérance sur des v.a.r. de loi uniforme*)

12. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. indépendantes telles que $X_n \sim \chi_n^2$, alors

$$Y_n = \frac{X_n - \mathrm{E}[X_n]}{\sigma(X_n)}$$

tend en loi vers $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

13. Donner des conditions sur les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que les v.a.r. suivantes convergent en loi, et donner la limite:

(a) $X \sim \delta_{a_n}$

(b) $X \sim \mathcal{N}(a_n, b_n)$

14. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n > 0$, on pose $X_n = n\min(U_1, \ldots, U_n)$. Montrer que $X_n \longrightarrow X$ où X est une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre 1.

15. **Quelques contre-exemples concernant les convergences.** Montrer que

(a) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \nRightarrow X_n - X \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

(b) X, Y, Z trois v.a.r. telles que X et Y ont même loi $\nRightarrow$ XZ et YZ ont même loi.

(c) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \nRightarrow F_n(x) \to F(x)$ (si x est un point de discontinuité de F)

(d) $X_n \xrightarrow{P} X \nRightarrow X_n \to X \quad p.s.$

(e) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \nRightarrow X_n \xrightarrow{P} X$ sauf si $X = C^{te} \quad p.s.$

16. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. telle que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où X est une v.a.r. dont la loi est continue, montrer que $F_n \to F$ uniformément (où F_n et F désignent les fonctions de repartition de X_n et de X respectivement).

17. (a) Soit X et Y deux v.a.r., $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a.r. telles que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$. Montrer que cela ne suffit pas pour affirmer que

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$$

et que

$$X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} XY$$

(b) Soit X une v.a.r., $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a.r. telles que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} 0$. Montrer que

i. $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

ii. $X_n Y_n \xrightarrow{P} 0$ (*Indication: montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ entraine que X_n est une suite tendue, i.e.* pour tout n, *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$ compact tel que $P\{X_n \in K\} \geq 1 - \varepsilon$*)

18. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. de même loi de Cauchy de paramètre $\alpha > 0$. On pose $S_n = \sum_{p=1}^{n} X_p$.

(a) Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge en loi, et la déterminer.

(b) Déterminer la loi de $\frac{S_{n+p}}{n+p} - \frac{S_n}{n}$

(c) Montrer que $\frac{S_n}{n}$ ne converge pas en probabilité, et expliquer pourquoi la loi faible des grands nombres ne s'applique pas ici.

19. (a) On va montrer dans un premier temps qu'il n'existe pas de probabilités sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(n\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}$.

i. Notons $(p_k)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite ordonnée des nombres premiers. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{k\in\mathbb{N}}}\,(p_k\mathbb{N}^*)\right) = 0$$

ii. Montrer que $(p_k\mathbb{N}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ est indépendante.En déduire une autre valeur de $\mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{k\in\mathbb{N}}(p_k\mathbb{N}^*)\right)$ en admettant que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$. Conclure.

(b) On pose $\Omega = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $A_n = \{(p,q) \in \Omega\ ;\ \mathrm{pgcd}(p,q) = n\}$ et $\mathcal{B} = \sigma(A_n\ ;\ n \in \mathbb{N}^*)$.

i. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{\alpha}{n^2}$ défini une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$ et calculer α.

ii. Montrer qu'il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}_1$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que la restriction de $\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_1$ à $\mathcal{B}$ coïncide avec $\mathbb{P}$. (on pourra à cette fin calculer $\mathbb{P}_1(n\mathbb{N}^*)^2$)