UNIVERSITE DE BOURGOGNE
UV8: Probabilités et Statistiques
Fiche de TD

1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité conjointe $f(x, y)$. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si f se factorise en le produit $f(x, y) = g(x)h(y)$ d'une fonction positive de x et d'une fonction positive de y.

2. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ sont aussi des variables aléatoires indépendantes (f et g étant des fonctions mesurables quelconques)

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes de loi uniforme sur $\left[0, \frac{1}{p}\right]$, $p \in]0, 1[$ étant fixé. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $N(\omega) = \inf(\{n \in \mathbb{N};\quad U_n(\omega) \leq 1\})$. Montrer que N est une v.a.r. presque sûrement finie, déterminer sa loi, son espérance, sa variance, et enfin déterminer la loi de U_N après avoir établi que U_N est bien une v.a.r.

4. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et Z de loi de Bernouilli $\mathbb{P}_Z = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. On suppose X et Z indépendantes et on pose $Y = XZ$
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Le couple (X, Y) est-il un couple Gaussien ?
   (c) $X + Y$ est-elle une variable aléatoire de loi normale ?

5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. centrées de carré intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$
$$A_n = \{|S_n| \geq \epsilon\} \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} \{|S_j| < \epsilon\} \right)$$

   (a) i. Montrer que pour tout $N \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{N} A_k = \left\{ \max_{1\leq k\leq N} |S_k| \geq \epsilon \right\}$$

   ii. Montrer que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[S_N^2\right] &\geq \sum_{k=1}^{N} \mathrm{E}\left[S_N^2 \boldsymbol{I}_{A_k}\right] \\ &\geq \sum_{k=1}^{N} \mathrm{E}\left[S_k^2 \boldsymbol{I}_{A_k}\right] + 2\sum_{k=1}^{N} \mathrm{E}\left[(S_N - S_k) S_k \boldsymbol{I}_{A_k}\right] \end{aligned}$$

   (b) Montrer que pour tous les entiers k et N tels que $1 \leq k \leq N$, $S_k \boldsymbol{I}_{A_k}$ et $S_N - S_k$ sont indépendantes.
   (c) En déduire l'**inégalité de Kolmogorov**:

$$\mathbb{P}\left(\left\{ \max_{1\leq k\leq N} |S_k| \geq \epsilon \right\} \right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_N)}{\epsilon^2}$$

6. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de lois respectives $P_X = p\delta_0 + q\delta_1$ et $P_Y = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \delta_k$ où $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$, et $\alpha > 0$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$Z(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ si } X(\omega) = 0 \\ Y(\omega) \text{ si } X(\omega) = 1 \end{cases}$$

   (a) Montrer que Z définit presque-sûrement une v.a.r. (i.e. il existe une v.a.r. $\widetilde{Z}$ presque-sûrement égale à Z). Dans la suite, on parlera de Z comme d'une v.a.r.

   (b) Déterminer la loi de Z.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de Z.

7. Soient B et C deux v.a.r. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.
   (a) Quelle est la probabilité que le polynôme $x^2 - 2Bx + C$ ait
      i. deux racines réelles distinctes,
      ii. deux racines complexes conjuguées,
      iii. une racine double.
   (b) Déterminer la densité de la v.a.r. $\Delta = B^2 - C$.

8. On considère un couple indépendant de v.a.r. (X,Y). On suppose que X est absolument continue de densité f_X et Y une variable discrète qui prend ses valeurs dans $D = \{y_n; n \in I\}$, $I \subset \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}$. Montrer en calculant sa densité que la v.a.r. $Z = X + Y$ est absolument continue.

9. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0,1]^2$. Calculer les lois de

$$\begin{array}{llll} (a) & X+Y & (b) & X-Y \\ (c) & XY & (d) & \frac{X}{Y} \end{array}$$

10. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité conjointe

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} \text{ si } x,y \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   (a) Déterminer les densités marginales de X et de Y
   (b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (c) Mêmes questions si (X,Y) a pour densité

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} \text{ si } 0 \leq x \leq y \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

11. Soit $Z = (X,Y)$ un vecteur aléatoire absolument continu, de support $\mathbb{R}^2$, dont les composantes X et Y sont indépendantes. En supposant que les densités de X et de Y sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, montrer que les deux propositions suivantes sont équivalents:

   i X et Y suivent toutes deux une même loi normale centrée.

   ii la loi de Z est isotrope, i.e. invariante par rapport à toute rotation autour de l'origine.

12. **Quelques résultats utiles.** Si $\mathcal{B}_n$ est une suite de tribus, on note $\mathcal{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma\left(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n+1}, \dots\right)$ la tribu de queue de $\left(\mathcal{B}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Les évènements de $\mathcal{C}$ sont appellés évènements asymptotiques. Par exemple, si $A_n \in \mathcal{B}_n$, $\overline{\lim} A_n$ est un evènement asymptotique (?).
   (a) **Loi 0-1 de kolmogorov.** Si les tribus $\mathcal{B}_n$ sont indépendantes, et si A est un évènement asymptotique, $P(A) = 0$ ou 1.
   (b) **Lemme de Borel-Cantelli.**
      i. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) < \infty$ alors $P\left(\overline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$
      ii. Si les A_n sont indépendants et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \infty$ alors $P\left(\overline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1$

13. Jacques et Lionel projettent de se rencontrer entre 17^H et 18^H. Chacun d'eux a promis de ne pas attendre l'autre plus de 10 minutes. On suppose qu'ils arrivent à des instants indépendents et uniformément distribués entre 17^H et 18^H. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

14. Montrer que quel que soit le couple de variables aléatoires (X_1, X_2) possédant des variances marginales:

$$P\left\{|X_1 - E[X_1]| \leq t_1\sigma(X_1) \text{ et } |X_2 - E[X_2]| \leq t_2\sigma(X_2)\right\} \geq 1 - \left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2}\right)$$

15. Montrer que si un vecteur aléatoire V dans $\mathbb{R}^r$ possède une matrice de variances et covariances Σ inversible, on a

$$E\left[(V - E[V])^T \Sigma^{-1} (V - E[V])\right] = r$$

(*Indication: Poser* $\Sigma = CC^T$)

16. Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi uniforme sur le disque unité $D(0, 1)$.
    (a) Calculer les lois marginales de X et de Y et montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
    (b) On note (θ, R) la représentation en coordonnées polaires de (X, Y). Calculer la loi du couple (θ, R) et montrer que θ et R sont indépendantes.

17. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Calculer la loi de $X_1 + X_2$.

18. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même densité

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \boldsymbol{I}_{[1,+\infty[}(x)$$

On pose $U = X_1 X_2$ et $V = \frac{X_1}{X_2}$.
    (a) Déterminer la loi du couple (U, V).
    (b) Déterminer les lois des marginales U et V. Sont-elles indépendantes ?
    (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire réelle $W = \frac{1}{\sqrt{UV}}$.

19. Soit U une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$. On considère les variables $X = \sin U$ et $Y = \sin(U + \theta)$ où θ est un réel donné.
    (a) Calculer l'espérance et la variance des v.a.r. X et Y.
    (b) On note ρ le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y défini par

$$\rho = \frac{cov\,(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

    Calculer ρ. Vérifier que si $|\rho| = 1$ alors il existe une relation linéaire entre X et Y, et que X indépendante de Y entraine $\rho = 0$. Interprétation statistique ?.

20. On cherche à mesurer une grandeur physique en faisant n mesures indépendantes. Toutes ces mesures sont entachées d'erreur et donnent donc des résultats aléatoires $X_1, \ldots X_n$ dont la moyenne commune m est la vraie valeur de la grandeur à mesurer. Ces mesures sont identiquement distribuées. Sachant que la variance de chacune d'elles est $0,25$, on veut obtenir un résultat qui soit éloigné de moins de $0,05$ de la vrai valeur (inconnue) m avec une probabilité de $0,99$. Que choisir pour n ?

21. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. absolument continues de densité $f(x, y) = \frac{k}{\sqrt{xy}} \boldsymbol{I}_T$ où T désigne l'intérieur du triangle joignant les points $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$. Déterminer k et les lois marginales de X et Y (densités et fonctions de répartition).

22. On appelle loi de Paréto unilatérale la famille à deux paramétres (r, α) de lois de densités

$$f_{r,\alpha}(x) = \frac{\alpha r^\alpha}{x^{\alpha+1}} \boldsymbol{I}_{\{x>r\}}$$

où r et α sont deux paramètres strictement positifs, et loi de Paréto bilatérale la famille à trois paramètres (r, s, α) de lois de densités

$$f_{r,s,\alpha}(x, y) = \frac{\alpha\,(\alpha + 1)\,(s - r)^\alpha}{(y - x)^{\alpha+2}} \boldsymbol{I}_{\{x<r<s<y\}}$$

où α est un reel strictement positif et r, s deux reels tels que $r < s$.
    (a) Calculer moyenne et variances des lois de Paréto unilatérales, quand elles existent.
    (b) Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de loi de Paréto de paramètres (r, s, α). Montrer que $s - X$ et $Y - r$ ont même loi et la déterminer.
    (c) Calculer $\mathrm{E}\left[(Y - X)^2\right]$ et le coefficient de corrélation ρ_{XY} de X et Y pour $\alpha > 2$.