UNIVERSITE DE BOURGOGNE

UV8: Probabilités et Statistiques

Fiche de TD no 3

1. (a) Montrer qu'une v.a.r X est discrète de loi
$$\mathbb{P}_X = \sum_{x \in D} \mathbb{P}\{X = x\} \delta_x$$
si et seulement si il existe une partie dénombrable D de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}\{X \in D\} = 1$
   (b) Retrouver la formule classique donnant la moyenne de X a partir de la définition générale de l'espérance d'une v.a.r. continue.

2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{N}$ l'ensemble des négligeables, i.e. toutes les parties de Ω contenues dans un ensemble mesurable et de mesure nulle.
   (a) Montrer que $\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N; \quad A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$ est une tribu (c'est la $\mathbb{P}$-*complétée* de $\mathcal{A}$)
   (b) Montrer que si l'on pose
$$\overline{\mathbb{P}}(A \cup N) = \mathbb{P}(A)$$
alors $\overline{\mathbb{P}}$ prolonge $\mathbb{P}$ sur $\left(\Omega, \overline{\mathcal{A}}\right)$.

   Par la suite, on supposera fréquemment *implicitement* que tous les ensembles négligeables sont mesurables.

3. Soit F la fonction de répartition d'une probabilité sur $\mathbb{R}^n$ et $F_1, \ldots, F_n$ ses répartitions marginales, i.e.
$$F_i(t) = P\{X_i \leq t\}$$
   (a) Montrer que si F est discontinue en $x = (x_1, \ldots, x_n)$, l'une des marginales est discontinue en x_i.
   (b) En déduire que F a au plus un ensemble dénombrable de points de discontinuité.
   (c) En conclure que F est caractérisée par ses valeurs aux points de continuité.

4. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^n$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Démontrer les propositions suivantes, où F est la fonction de répartition de X:
   (a) F est croissante et continue à droite en chacun de ses arguments $x_1, \ldots, x_n$.
   (b) $\lim F(x_1, \ldots, x_n)$ est égale à 0 si l'une au moins des variables x_i tend vers $-\infty$ et elle est égale à 1 si toute les variables x_i tendent vers $+\infty$.
   (c) Soit $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, on définit l'opérateur $\Delta_h^{(i)}$ par
$$\Delta_h^{(i)} G(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - G(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$
Montrer que pour tout $(h_1, \ldots, h_n)$ dans $[0, +\infty[^n$ et tout $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ on a
$$\Delta_{h_1}^{(1)} \cdots \Delta_{h_n}^{(n)} F(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$

5. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont la loi de probabilité absolument continue admet comme densité de probabilité
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \mathrm{e}^{-(x+1)} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$
   (a) On considère la fonction réelle $\varphi(u)$ définie par
$$\varphi(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$$
      i. Montrer que $Y = \varphi \circ X$ est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
      ii. Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$; Qu'en déduit-on pour la loi de Y?

iii. Montrer que la loi $\mathbb{P}_Y$ de la variable aléatoire réelle Y s'exprime comme barycentre d'une loi de probabilité concentrée en un point $\mathbb{P}_1$ et d'une loi de probabilité absolument continue $\mathbb{P}_2$ i.e.

$$\mathbb{P}_Y = \alpha_1\mathbb{P}_1 + \alpha_2\mathbb{P}_2$$

avec α_1 et α_2 réels positifs tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

(b) A tout nombre réel x, on associe sa partie décimale $\mathrm{frac}(x)$, définie par $\mathrm{frac}(x) = x - m$ où m est la partie entière de x i.e. l'unique entier relatif tel que $m \leq x < m+1$.

i. En admettant que la variable Z égale à la partie décimale de X est une variable aléatoire réelle (où X est la même variable aléatoire que dans la partie (a)), déterminer la loi de probabilité de Z.

6. Soit X la variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$.

(a) Déterminer la loi de probabilité et les fonctions de répartition des variables $Y = X^2$, $Z = \sqrt{X}$, $T = \mathrm{e}^X$ et $U = \sin(\pi X)$.

(b) Pourriez vous énoncer un théorème général pour $V = \varphi(X)$ si φ est strictement monotone ?

(c) Déterminer l'espérance et la médiane[1] de Y, Z, T et U.

(d) On suppose maintenant que X est une variable uniformément répartie sur $[-1,1]$. Déterminer la loi de probabilité de $Y = X^2$.

7. **Aiguille de Buffon.** On considère un parquet fait de lattes de bois de largeurs d et une aiguille de longueur $l < d$ (par exemple $l = \frac{d}{2}$). On jette cette aiguille au sol...

(a) Calculer la probabilité pour que l'aiguille tombe a cheval entre deux lattes du parquet.

(b) En déduire une méthode pour estimer π et discutter sur sa validité.

8. Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue de densité f et de fonction de répartition F. Soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et dérivable. On admettra que $Y = \varphi \circ X$ est une variable aléatoire.

(a) Déterminer la fonction de répartition et la densité de Y dans les cas suivants:

i. φ est strictement croissante.

ii. φ est strictement décroissante.

(b) Etudier le cas où X est une variable aléatoire normale réduite et $\varphi(x) = x^2$. Calculer $E[Y]$.

9. **Problème de l'U.V. Probabilités et Statistiques de l'examen de Juin 1995.** Soit X une variable aléatoire réelle, absolument continue définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de même loi de probabilité que X. On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X.

On suppose de plus que ces n variables aléatoires réelles sont telles que:

$$\forall \omega \in \Omega,\ \forall i \neq j,\ i \text{ et } j \in \{1, 2, \ldots n\} \text{ alors } X_i(\omega) \neq X_j(\omega)$$

On note $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots n\}$.

(a) Montrer que si $\omega \in \Omega$, il existe une unique permutation $p(\omega, .)$ telle que

$$X_{p(\omega,1)}(\omega) < X_{p(\omega,2)}(\omega) < \cdots < X_{p(\omega,n)}(\omega) \tag{1}$$

On définit alors une application $p : \Omega \longrightarrow \mathcal{S}_n$ telle que (1) soit réalisé quelque soit $\omega \in \Omega$.

(b) Montrer que

$$\forall \sigma_0 \in \mathcal{S}_n \quad p^{-1}(\{\sigma_0\}) = \left\{\omega \in \Omega,\ X_{\sigma_0(1)}(\omega) < X_{\sigma_0(2)}(\omega) < \cdots < X_{\sigma_0(n)}(\omega)\right\}$$

En déduire que l'application p est mesurable.

[1] Une valeur médiane d'une v.a.r. X est par définition un réel α tel que $P\{X < \alpha\} \leq \frac{1}{2} \leq P\{X > \alpha\}$.

(c) On définit $Y_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ par

$$\forall \omega \in \Omega \quad Y_k(\omega) = X_{p(\omega,k)}(\omega)$$

Montrer que

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \{\omega;\ Y_k(\omega) \in B\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega;\ p(\omega,k) = i \text{ et } X_i(\omega) \in B\}$$

En déduire que Y_k est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

(d) Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, on définit $R_n(.,x)$ l'application de Ω dans $\{1, 2, \ldots n\}$ par

$$\forall \omega \in \Omega \quad R_n(\omega, x) = \text{card}\,\{i \in \{1, 2, \ldots n\}\,;\ X_i(\omega) \leq x\}$$

i. Montrer que pour tout réel x fixé, $R_n(.,x)$ est une variable aléatoire réelle.

ii. Montrer que $\mathbb{P}\{\omega;\ R_n(\omega,x) = k\} = C_n^k F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}$.

(e) Soit $k \in \{1, 2, \ldots n\}$. On se propose de calculer la fonction de répartition F_k de Y_k en fonction de F.

i. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\{\omega;\ Y_k(\omega) \leq x\} = \bigcup_{l=k}^{n} \{\omega;\ R_n(\omega, x) = l\}$$

En déduire que

$$\mathbb{P}\{\omega;\ Y_k(\omega) \leq x\} = \sum_{l=k}^{n} C_n^l F(x)^l (1 - F(x))^{n-l}$$

ii. Montrer que la fonction de répartition F_k de Y_k s'exprime ainsi:

$$F_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k} dt$$

Indication: On utilisera l'égalité suivante (après l'avoir démontrée):

$$\sum_{l=k}^{n} C_n^l p^l (1-p)^{n-l} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{p} t^{k-1}(1-t)^{n-k} dt$$

10. Dans la plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le cercle de centre O et de rayon $R > 0$, et le point A de coordonnées $(R, 0)$. On choisit *au hasard* (i.e. suivant une loi uniforme) un point M sur le cercle. Soit L la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ et C la longueur de la corde AM, X et Y les coordonnées de M, et θ l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. Soit P le point d'intersection de la droite OM avec la verticale issue de A. Déterminer les fonctions de répartition, densités (s'il y a lieu), espérances et variances (si possible) de

    (a) la loi de L
    (b) la loi de θ
    (c) la loi de C
    (d) les lois de X et de Y
    (e) la loi de P.

11. On dit qu'une variable aléatoire réelle Z suit une loi Log-normale de paramètres μ et γ si la variable aléatoire $\ln(Z)$ a une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \gamma)$ d'espérance μ et de variance γ. Determiner la densité de la variable aléatoire Z, son espérance et sa variance.

12. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi de fonction de répartition F continue. Montrer que $\mathbb{P}\{X = Y\} = 0$.

13. **Les fonctions génératrices.** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité $\mathbb{P}$ caractérisée par $\mathbb{P}\{X = k\} = p_k$, $k \in \mathbb{N}$. On définit la fonction génératrice de X par

$$G_X(s) = \mathrm{E}\left[s^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série $(p_k s^k)$ est supérieur ou égal à 1 et que G_X est indéfiniment dérivable dans $]-1,+1[$.

(b) Montrer que

$$p_k = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0)$$

En déduire que G_X caractérise P.

(c) Montrer que

$$\mathrm{E}\left[X(X-1)\cdots(X-k+1)\right] = G_X^{(k)}(1) \leq \infty$$

où $G_X^{(k)}(1) = \lim_{s \nearrow 1} G_X^{(k)}(s)$. En déduire espérance et variance de X lorsque ces quantités existent pour X.

(d) Soit X_1 de loi $\mathcal{B}(n_1, p)$. Calculer G_{X_1}. Si X_2 suit une loi $\mathcal{B}(n_2, p)$ et que X_2 est indépendante de X_1, calculer $G_{X_1+X_2}$. Conclusion ?

(e) Soit Y_1 de loi $\mathcal{P}(\lambda_1)$. Calculer G_{Y_1}. Si Y_2 suit une loi $\mathcal{P}(\lambda_2)$ et que Y_2 est indépendante de Y_1, calculer $G_{Y_1+Y_2}$. Conclusion ?

(f) Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Montrer que $G_{X_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G_Y$ où Y suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

14. Pour tout réel u, on note $\lfloor u \rfloor$ (partie entière de u) l'unique entier relatif tel que

$$\lfloor u \rfloor \leq u < \lfloor u \rfloor + 1$$

On considère l'application f de $]0,1]$ dans $[0,1[$ définie par

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,1] & \to & [0,1[\\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \end{array}$$

(a) Explicitez la restriction de f à l'intervalle $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$; représenter graphiquement f.

(b) On considère une variable aléatoire réelle X définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que X est absolument continue de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x} \mathbb{I}_{]0,1]}(x)$$

On définit

$$Y = \frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$$

i. Soit $0 < y < 1$. Montrer que

$$\{Y < y\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n+y} < X \leq \frac{1}{n} \right\}$$

ii. En déduire que Y est une v.a.r.

iii. Déterminer la fonction de répartition de Y. En déduire que Y est absolument continue de même loi que X.