UNIVERSITE DE BOURGOGNE
UV8: Probabilités et Statistiques
Fiche de TD no 2

Lectures complémentaires:
Cours de théorie de la mesure (UV3) !
P. Brémaud, Introduction aux probabilités, *Springer-Verlag*
G. Calot, Exercices de calcul des probabilités, *Dunod*
J.-P. Ansel, Y. Ducel, Exercices corrigés en théorie des probabilités, *Ellipses* (faisant suite à: Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration)
D. Foata, A. Fuchs, Calcul des probabilités: cours et exercices corrigés, *Masson*
M. Cottrell, C. Duhamel, V. Genon-Catalot, Exercices de probabilités aves rappels de cours, *Collections DIA*

1. Soit μ une mesure finiment additive sur une algèbre $\mathcal{A}$. Soit $(A_n)_{n\in I\!N}$ une suite d'évènements disjoints de $\mathcal{A}$, telle que $A=\sum_{n\in I\!N} A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que
$$\mu(A) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$
2. Soient a et b deux réels quelconques. Déterminer la fonction de répartition de $Y = aX + b$.
3. Soit F une fonction de répartition continue et $h > 0$, montrer que
$$\Phi_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)\,dt$$
est aussi une fonction de répartition.
4. **Mesure de Lebesgue-Stieljes.** Une fonction de distribution généralisée G sur $I\!R$ est une fonction croissante au sens large, à valeurs dans $I\!R$, continue à droite. On définit pour tout $a < b \quad \mu(]a,b]) = G(b) - G(a)$. Montrer que μ s'étend en une mesure positive sur $(I\!R, \mathcal{B}_{I\!R})$.
5. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n=1\ldots\infty}$ une suite de v.a.r.[1] et N une variable aléatoire à valeur dans $I\!N^*$. Montrer que X définie par
$$\forall\omega \in \Omega \qquad X(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$$
est une v.a.r.
6. On suppose que X est une v.a.r. de loi uniforme sur $[a,b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$. Déterminer a et b sachant que $E[X] = 10$ et $\sigma^2(X) = 12$.
7. (a) Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une v.a.r. X dont la fonction de répartition est donnée par
$$F_X(t) = \frac{1}{2}\left(e^t 1_{]-\infty,0]}(t) + \left(2 - e^{-t}\right) 1_{]0,+\infty[}(t)\right)$$
Déterminer la loi de $Y = |X|$
   (b) On suppose que Z est une v.a.r. de fonction de répartition
$$F_Z(t) = \frac{1}{4}(t+2)\, 1_{[-1,0[\cup[1,2[}(t) + \frac{3}{4} 1_{[0,1]}(t) + 1_{[2,+\infty[}(t)$$
Donner une représentation graphique de F_Z et déterminer la loi de Z.
8. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une v.a.r. positive X de la fonction de répartition F_X.
   (a) Montrer que pour tout $n \in I\!N^*$
$$E[X^n] = \int_0^{+\infty} nt^{n-1} P\{X > t\}\,dt = \int_0^{+\infty} nt^{n-1}(1 - F_X(t))\,dt$$
(*Indication: On pourra appliquer le théorème de Tonelli sur la fonction* $H(\omega,t) = nt^{n-1} 1_{]t,+\infty[}(X(\omega))$)

[1] Variable Aléatoire Réelle

(b) Montrer que l'hypothèse X positive est nécessaire.

(c) Calculer l'espérance et la variance des v.a.r. dans les cas suivants (où $\alpha > 0$):

i.
$$F_X = t1_{[0,1[}(t) + 1_{[1,+\infty[}(t)$$

ii.
$$F_Y = \left(1 - e^{-\alpha t}\right) 1_{[0,+\infty[}(t)$$

iii.
$$F_Z = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} 1_{[n,+\infty[}(t)$$

9. Soit $(X_n)_{n=1\dots\infty}$ une suite de v.a.r. i.i.d.[2] suivant une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$. Montrer que
$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}$$
est une v.a.r. et déterminer sa loi.

10. Soit $(X_n)_{n=1\dots\infty}$ une suite de v.a.r. i.i.d. selon une loi de Bernouilli dans $\{0,2\}$ de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose
$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{3^n}$$
Montrer que la v.a.r. X a une loi de probabilité continue mais non absolument continue (*i.e.* sa probabilité est une mesure *singulière*).

11. Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F que l'on suppose continue. calculer la loi de $F(X)$ (*Indication: On pourra supposer dans un premier temps F strictement croissante*).

12. **Théorème du rejet[3].** Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire
$$f(x) = \alpha\rho(x)g(x)$$
où
$$\begin{array}{l} \alpha \in [1,+\infty[\\ g \text{ densité de probabilité sur } \mathbb{R} \\ \rho \text{ fonction à valeurs dans } [0,1] \end{array}$$
Montrer que si Z est une v.a.r. de densité g et U est une v.a.r. de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de Z alors la loi de probabilité de Z sachant $\{\rho(Z) > U\}$ est de densité f.

13. Soient X et Y deux v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $(R,\theta) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[$ la représentation en coordonnées polaires de (X,Y). Montrer que (R^2,θ) est un couple de v.a.r. indépendantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$ et déterminer la loi de R^2 et de θ.

14. **Algorithme de simulation.** Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a.r. i.i.d. telles que pour tout entier n, le couple (U_n,V_n) suive la loi uniforme dans $[-1,1]^2$. Soient $X,Y,$ et N les trois variables aléatoires définies par
$$\begin{array}{l} N = \inf\{n \in \mathbb{N};\ U_n^2 + V_n^2 \leq 1\} \\ \rho = U_N^2 + V_N^2 \\ \alpha = \sqrt{-2\frac{\ln(\rho)}{\rho}} \\ X = \alpha U_N \\ Y = \alpha V_N \end{array}$$

[2] Indépendantes et Identiquement Distribuées

[3] Cet exercice et les deux suivants forme une série d'exercices un peu exotiques sur la simulation de variables aléatoires.

(a) Déterminer la loi de N, calculer $E[N]$, $\sigma(N)$, et $P\{N \geq n\}$ pour n donné.

(b) Montrer que ρ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

(c) Calculer la loi de (X,Y).

15. (a) Soit X une v.a.r. admettant un moment d'ordre r. En minorant $E[|X|^r]$, montrer l'inégalité de Markov

$$P\{|X| \geq t\} \leq \frac{E[|X|^r]}{t^r}$$

(b) En déduire l'inégalité de Chebyshev

$$P\{|X - E[X]| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

16. **Théorème de Weierstrass, démonstration de Bernstein**. Considérons N variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{i=1\ldots N}$ telles que

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{avec probabilité} \quad x \\ X_i = 0 & \qquad\qquad\qquad\quad 1-x \end{cases}$$

On notera Y_N la variable aléatoire $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$.
Soit $f : [0,1] \longmapsto I\!R$ une fonction continue

(a) Calculer $p_N(x) = E[f(Y_N)]$.

(b) Montrer que $p_N \to f$ uniformément en N. (*Indication*: on utilisera l'inégalité de Chebychev sur Y_N)