UNIVERSITE DE BOURGOGNE

UV8: Probabilités et Statistiques

Fiche de TD no 1

1. (a) **Rappels.** Soit A, B, C trois événements. Exprimer à l'aide des opérations sur les évènements (où les ensembles) les évènements suivants et calculer leurs indicatrices à partir de celles de A, B, C:
   i. A est réalisé seul
   ii. A et B sont réalisés, mais pas C
   iii. un des trois évènements est réalisé
   iv. aucun évènement n'est réalisé
   v. deux évènements au plus sont réalisés
   vi. deux évènements ou plus se produisent
   vii. deux évenements se produisent, mais pas trois

   (b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements. Ecrire à l'aide des opérations $\cap$ et $\cup$ les évènements suivant, et calculer leurs indicatrices à partir de celles des $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   i. $\overline{\lim} A_n =$ une infinité de A_n se produisent.
   ii. $\underline{\lim} A_n =$ tous les A_n à partir d'un certain rang se produisent

   (c) Soit f une fonction de Ω_1 dans Ω_2, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de Ω_2, A et B des parties de Ω_2. Montrer que:
   i. $1_{f^{-1}(A)} = 1_A \circ f$
   ii. $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$
   iii. $f^{-1}(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$
   iv. $f^{-1}(\cap_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

   (d) Soit A et B deux parties de Ω, déterminer $\sigma(A)$, $\sigma(A) \cap \sigma(B)$, $\sigma(A) \cup \sigma(B)$, $\sigma(A, B)$, $\sigma(A) \vee \sigma(B)$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de Ω; décrire $\sigma(A_n; n \in \mathbb{N})$. Décrire $\sigma(\{\omega\}; \omega \in \Omega)$.

2. Soit $f : \Omega_1 \longmapsto \Omega_2$, $\mathcal{A}_2$ une tribu de Ω_2. Vérifier que $f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ est une tribu. On la note $\sigma(f)$. Si $\mathcal{C}_2$ est un ensemble de parties de Ω_2, prouver que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}_2)) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}_2))$.

3. Soit Ω un espace topologique, $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de Ω, et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de Ω. On rappelle que la tribu Borélienne sur Ω est par définition $\mathcal{B}_\Omega = \sigma(\mathcal{O})$.

   (a) Montrer que $\mathcal{B}_\Omega = \sigma(\mathcal{F})$.
   (b) Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(]-\infty, a]; a \in \mathbb{R}) = \sigma(]-\infty, a[; a \in \mathbb{R})$
   (c) Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^k}$ est engendré par les cubes à sommets de coordonnées rationnelles.

4. **Formule de Poincaré.** Soit E un ensemble et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties de E.

   (a) Montrer que

$$1_{\cup A_i} = \sum 1_{A_i} - \sum_{i_1<i_2} 1_{A_{i_1}} 1_{A_{i_2}} + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{i_1<\cdots<i_k} 1_{A_{i_1}} \ldots 1_{A_{i_k}} + \cdots + (-1)^{n-1} 1_{A_1} \ldots 1_{A_n}$$

   (b) En déduire que

$$\mathrm{Card}(\cup A_i) = \sum \mathrm{Card}(A_i) - \sum_{i_1<i_2} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots$$

$$\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i) - \sum_{i_1<i_2} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots$$

5. **Application.** On met au hasard n lettres dans n enveloppes adressées à des personnes différentes. Calculer la probabilité pour que au moins une personne reçoive la lettre qui lui est destinée. Donner une estimation quand n est assez grand (par exemple à $0,01$ près pour $n \geq 5$).

6. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup X_n$, $\inf X_n$, $\overline{\lim} X_n$, $\underline{\lim} X_n$ sont des variables aléatoires et que $\{\omega; \lim X_n(\omega) \text{ existe}\}$ est un ensemble mesurable.

7. Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{E})$ et f mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$. Montrer que $f \circ X$ est mesurable et que $\sigma(X)$ contient $\sigma(f \circ X)$.

8. **Jumanji.** On lance deux dés à 6 faces. Représenter la fonction de répartition de la somme des deux faces. Quelle est la probabilité d'obtenir "5 ou 8" ? On repète l'expérience. Combien de temps faut il en moyenne pour obtenir "5 ou 8"

9. On choisit au hasard un des nombres entiers $1, 2, \ldots n$, tous les choix étant équiprobables. Soit p un entier non nul inférieur ou égal à n. Soit A_p l'événement "*le nombre choisi est divisible par p*".

   (a) Calculer $P(A_p)$ lorsque p divise n.

   (b) Montrer que si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des diviseurs premiers de n distincts, les évènements $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_k}$ vérifient

   $$P\left(A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \cdots \cap A_{p_k}\right) = P\left(A_{p_1}\right) P\left(A_{p_2}\right) \ldots P\left(A_{p_k}\right)$$

   (c) En déduire que

   $$P\left(A_{p_1}^c \cap A_{p_2}^c \cap \cdots \cap A_{p_k}^c\right) = P\left(A_{p_1}^c\right) P\left(A_{p_2}^c\right) \ldots P\left(A_{p_k}^c\right)$$

   (on pourra utiliser la formule de Poincaré)

   (d) On appelle **fonction indicatrice d'Euler** la fonction Φ définie sur les entiers naturels dont la valeur $\Phi(n)$ est égale au nombre d'entiers inférieurs à n et premiers avec n. Montrer que

   $$\Phi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \text{ divise } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

10. **Problème du scrutin**. Soit $(x, y) \in \mathbb{N} \otimes \mathbb{N}$. Un chemin $(s_0, s_1, \ldots s_x)$ de l'origine au point (x, y) est une ligne polygonale joignant les points d'abscisse $0, 1, \ldots x$ et d'ordonnées $s_0, s_1, \ldots s_x$ respectivement où $x_0 = 0$, $s_x = y$ et $\forall k = 1 \ldots x \quad |s_k - s_{k-1}| = 1$.

    (a) Vérifier qu'un point peut être atteint par un tel chemin si et seulement si

    $$\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad \begin{cases} x = p + q \\ y = p - q \end{cases}$$

    et calculer le nombre de chemins joignant $(0, 0)$ à (x, y). On notera ce nombre $N_{x,y}$.

    (b) Montrer le **principe de reflexion** suivant:
    Le nombre de chemins joignant A à B qui touchent ou traversent l'axe des abscisses est égal au nombre de chemins qui joignent A' à B où si $A = (x_A, y_A)$ alors $A' = (x_A, -y_A)$.

    (c) Soient $x > 0$, $y > 0$. Montrer que le nombre de chemins $(s_0, s_1, \ldots s_x)$ joignant $(0, 0)$ à (x, y) tels que $s_1 > 0$, $s_2 > 0, \ldots, s_{x-1} > 0$ vaut $\left(\frac{y}{x}\right) N_{x,y}$.

    (d) Montrer par un **principe de dualité** que:
    Le nombre de chemins $(s_0, s_1, \ldots s_x)$ joignant $(0, 0)$ à (x, y) tels que $s_1 < y$, $s_2 < y, \ldots, s_{x-1} < y$ vaut $\left(\frac{y}{x}\right) N_{x,y}$.

    (e) Montrer le théorème suivant, où l'on a posé $L_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$:
    Parmi les C_{2n}^n chemins joignant l'origine au point $(2n, 0)$, il y a

    i. L_{n-1} chemins tels que $s_1 > 0$, $s_2 > 0, \ldots, s_{2n-1} > 0$.

    ii. L_n chemins tels que $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0, \ldots, s_{2n-1} \geq 0$.

    (f) On pose

    $$u_n = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n$$

    et

    $$v_n = \frac{1}{2n} u_{n-1}$$

    Vérifier que $v_n = u_{n-1} - u_n$ et calculer

i. $P\{s_{2n} = 0\}$
ii. $P\{s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ \ldots, s_{2n-1} \neq 0,\ s_{2n} = 0\}$
iii. $P\{s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ \ldots, s_{2n-2} \geq 0,\ s_{2n-1} < 0\}$
iv. $P\{s_1 \neq 0,\ s_2 \neq 0,\ \ldots, s_{2n-1} \neq 0,\ s_{2n} \neq 0\}$
v. $P\{s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ \ldots, s_{2n-1} \geq 0,\ s_{2n} \geq 0\}$

(g) Montrer que la probabilité du dernier retour en zéro vérifie

$$\mathbb{P}\{s_{2k} = 0,\ s_{2k+1} \neq 0,\ \ldots, s_{2n} \neq 0\} = u_k u_{n-k} \simeq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

(h) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité pour que le dernier retour en zéro ait lieu entre pn et qn est, pour n grand, environ égale à $\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{q} - \arcsin\sqrt{p}\right)$ (loi de l'arcsinus).

11. **Application.** Dans une urne se trouvent 600 bulletins pour un candidat A et 400 bulletins pour un candidat B. Quelle est la probabilité pour que, pendant le dépouillement, le candidat A soit toujours en avance sur le candidat B.

12. **Application.** 100 personnes font la queue devant un cinéma. La place est à 5^F. 60 personnes ont une pièce de 5^F et 40 personnes ont 10^F. Combien faut il de pièces initialement en caisse pour que la monnaie ne manque pas, avec une probabilité de 95%.

13. Soit μ une probabilité sur $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ et F l'application de $I\!R$ dans $[0,1]$ définie par $F(x) = \mu(]-\infty, x])$.

(a) Montrer que F est croissante sur $I\!R$ et admet des limites à droite et à gauche en tout point de $I\!R$. Montrer que F est continue à droite sur $I\!R$ et que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

(b) Montrer que, pour tout a, b de $I\!R$ tels que $a < b$:

i. $\mu(]a,b]) = F(b) - F(a)$. En déduire que μ est entièrement déterminée par la connaissance de F.
ii. $\mu(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$ où $F(a^-)$ est la limite à gauche de F au point a.
iii. F est continue en a si et seulement si $\mu(\{a\}) = 0$.

(c) Soit D l'ensemble des points de $I\!R$ où F est discontinue et, pour tout $n \in N^*$, $D_n = \{t \in I\!R\ ;\quad \mu(\{t\}) \geq \frac{1}{n}\}$. Montrer que $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$ et en déduire que D est dénombrable.

14. Soit E un espace métrique muni de sa tribu Borélienne $\mathcal{B}_E$ et P une probabilité sur $(E, \mathcal{B}_E)$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}_E$

$$\begin{aligned} P(A) &= \inf\{P(G);\quad G \text{ ouvert, } G \supset A\} \\ &= \sup\{P(F);\quad F \text{ fermé, } F \subset A\} \end{aligned}$$