Exercices

Filtres de Wiener

Exercice 1. On considère un processus de la forme $X_n = \theta + W_n$ où W_n est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance 1 tel que W_n et W_j sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que θ suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendante de $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Caractériser le filtre de Wiener permettant d'estimer θ à partir de X_n, X_{n-1}, ..., X_{n-p+1}. On demande de calculer les coefficients *explicitement*.

Exercice 2. On considère un processus de la forme $X_n = S_n + W_n$ où W_n est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance μ^2 tel que W_n et W_j sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que S_n suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendante de $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et que de même, S_n et S_j sont indépendants si $n \neq j$.

Caractériser le filtre de Wiener permettant d'estimer S_n à partir de X_n, X_{n-1}, ..., X_{n-p+1}. On demande de calculer les coefficients explicitement.

Exercice 3. On considère un processus de la forme $X_n = b_n + \alpha b_{n-1} + W_n$ où W_n est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 tel que W_n et W_j sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que b_n est une variable aléatoire uniforme à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendante de $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et que de même, b_n et b_j sont indépendants si $n \neq j$ ($\mathbb{P}(b_n = 1) = \mathbb{P}(b_n = -1) = \frac{1}{2}$). Construire un filtre qui estime b_{n-d}, $d > 0$.

Exercice 4. On considère un processus de la forme $X_n = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} + W_n$ où W_n est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 tel que W_n et W_j sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que S_n suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendante de $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et que de même, S_n et S_j sont indépendants si $n \neq j$.

1. Donner l'équation de Wiener–Hopf permettant de calculer les coefficients du filtre de Wiener d'ordre 3 permettant d'estimer S_{n-2} à partir de X_n, X_{n-1} et X_{n-2}.
2. Vérifier que si $\sigma = 0$, la solution est

$$\hat{S}_{n-1} = -\frac{X_n + 3X_{n-1} + X_{n-2}}{5}$$

Exercice 5. (corrigé) On considère le processus $X_n = \alpha\, S_n + \beta\, S_{n-1} + W_n$ où W_n est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 tel que W_n et W_j sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que S_n suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendante des W_j et que de même, S_n et S_j sont indépendants si $n \neq j$. On se propose de calculer un filtre de Wiener d'ordre 3 qui estime $\theta = S_{n-1}$.

1. Calculer les covariances $E[X_n X_{n-k}]$ et $E[X_{n-k}\theta]$ pour $k = 0, 1, 2$.

- $\Gamma_X(0) = E[X_n X_n] = E[(\alpha\, S_n + \beta\, S_{n-1} + W_n)(\alpha\, S_n + \beta\, S_{n-1} + W_n)] = \alpha^2 + \beta^2 + \sigma^2$
- $\Gamma_X(1) = E[X_n X_{n-1}] = E[(\alpha\, S_n + \beta\, S_{n-1} + W_n)(\alpha\, S_{n-1} + \beta\, S_{n-2} + W_{n-1})] = \alpha\beta$
- $\Gamma_X(2) = E[X_n X_{n-2}] = E[(\alpha\, S_n + \beta\, S_{n-1} + W_n)(\alpha\, S_{n-2} + \beta\, S_{n-3} + W_{n-2})] = 0$

et

- $\Gamma_{\theta X}(0) = E[\theta X_n] = E[X_{n-1}(\alpha\, S_n + \beta\, S_{n-1} + W_n)] = \beta$
- $\Gamma_{\theta X}(1) = E[\theta X_{n-1}] = E[X_{n-1}(\alpha\, S_{n-1} + \beta\, S_{n-2} + W_{n-1})] = \alpha$
- $\Gamma_{\theta X}(2) = E[\theta X_{n-2}] = E[X_{n-1}(\alpha\, S_{n-2} + \beta\, S_{n-3} + W_{n-2})] = 0$

2. En déduire le système de Wiener-Hopf du filtre d'ordre 3.

$$\begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2+\sigma^2 & \alpha\beta & 0 \\ \alpha\beta & \alpha^2+\beta^2+\sigma^2 & \alpha\beta \\ 0 & \alpha\beta & \alpha^2+\beta^2+\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculer les paramètres du filtre de Wiener $\widehat{S}_{n-1} = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2}$ quand $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ (σ étant quelconque).

$$\begin{pmatrix} 1+\sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $a_0 = a_2 = 0$ et $a_1 = \frac{1}{1+\sigma^2}$ soit

$$\widehat{S}_{n-1} = \frac{1}{1+\sigma^2} X_{n-1}$$

4. Vérifier que si $\alpha = \beta = \sigma = 1$ alors $a_0 = \frac{5}{21}$, $a_1 = \frac{2}{7}$ et $a_2 = -\frac{2}{21}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{21} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{5}{21} + \frac{2}{7} \\ \frac{5}{21} + 3\frac{2}{7} - \frac{2}{21} \\ \frac{2}{7} - 3\frac{2}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$