Probabilités

Examen

Les exercices suivants ne sont pas classés par ordre de difficulté. Certains sont faciles (et certaines questions tellement simples qu'elles peuvent paraître absurdes), d'autres un peu moins. Enfin, l'énoncé est long, il en sera tenu compte dans le barème.

1. Combien peut-on faire d'anagrammes (ayant un sens ou pas) avec les mots suivants : (a) radio, (b) tibia et (c) kinésithérapeute (é⇔e) ?
   (a) $5! = 120$
   (b) $\frac{5!}{2} = 60$ *(car il y a deux "i" qui, lorsqu'on les permutte entre eux, ne donnent pas un nouvel anagramme)*
   (c) $\frac{16!}{4!2!2!} = 217945728000$ *(4 "e", 2 "i" et 2 "t")*
2. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup (B \cup C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

3. On désire envoyer trois lettres nominatives à trois personnes distinctes. Pour cela, on glisse les lettres dans des enveloppes puis on écrit les trois adresses au hasard, sans prendre garde à apparier correctement lettres et enveloppes. Quelle est la probabilité qu'une personne au moins reçoive la lettre qui lui est destinée ?
   On peut utiliser l'exercice précédent, ou plus simplement compter les cas, il n'y en a que 6 :

Lettre 1	*Lettre 2*	*Lettre 3*	*Nombre de lettres correctes*
1	*2*	*3*	*3*
1	*3*	*2*	*1*
2	*1*	*3*	*1*
2	*3*	*1*	*0*
3	*1*	*2*	*0*
3	*2*	*1*	*1*

et donc la réponse est $\frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

4. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ dont on rappelle la densité de probabilité :

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \text{ si } x \geq 0 \text{ et } f(x) = 0 \text{ si } x < 0$$

(a) Calculer $\mathbb{P}(\{X \leq 1\})$ (probabilité que la valeur de X soit inférieure à 1)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X \leq 1\}) &= \int_0^1 \lambda \exp(-\lambda x)\, dx \\ &= [-\exp(-\lambda x)]_0^1 = 1 - \exp(-\lambda)\end{aligned}$$

(b) Calculer $\mathbb{P}(\{X \leq 2\} / \{X > 1\})$ (probabilité que la valeur de X soit inférieure à 2 sachant qu'elle est supérieure à 1)

$$\mathbb{P}(\{X \leq 2\} / \{X > 1\}) = \frac{\mathbb{P}(\{1 < X \leq 2\})}{\mathbb{P}(\{X > 1\})}$$

or

$$\mathbb{P}(\{X > 1\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X \leq 1\}) = \exp(-\lambda)$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{1 < X \leq 2\}) &= \int_1^2 \lambda \exp(-\lambda x)\, dx \\ &= [-\exp(-\lambda x)]_1^2 = \exp(-\lambda) - \exp(-2\lambda)\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}(\{X \leq 2\} / \{X > 1\}) = \frac{\exp(-\lambda) - \exp(-2\lambda)}{\exp(-\lambda)} = 1 - \exp(-\lambda)$$

(c) Que remarquez-vous ?

$$\mathbb{P}(\{X \leq 1\}) = \mathbb{P}(\{X \leq 2\} / \{X > 1\})$$

(loi dite "d'absence de postaction")

5. Une boite contient trois pièces apparemment semblables mais dont une est aimantée : la pièce magnétique retombe toujours sur "Pile". On choisit au hasard une pièce que l'on jette.

   (a) Quelle est la probabilité a priori d'obtenir "Pile" ?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{Pile}\right) &= \mathbb{P}\left(\text{Pile / Pièce normale}\right)\mathbb{P}\left(\text{Pièce normale}\right)\\ &+ \mathbb{P}\left(\text{Pile / Pièce aimantée}\right)\mathbb{P}\left(\text{Pièce aimantée}\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

   (b) On obtient effectivement "Pile". Quelle est la probabilité que la pièce choisie soit la pièce magnétique ?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{Pièce aimantée / Pile}\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\text{Pièce aimantée et retombe sur Pile}\right)}{\mathbb{P}\left(\text{Pile}\right)}\\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\text{Pièce aimantée}\right)}{\mathbb{P}\left(\text{Pile}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   (c) On relance la pièce, on obtient encore "Pile". Quelle est maintenant la probabilité que la pièce choisie soit la pièce magnétique ?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(2\times\text{Pile}\right) &= \mathbb{P}\left(2\times\text{Pile / Pièce normale}\right)\mathbb{P}\left(\text{Pièce normale}\right)\\ &+ \mathbb{P}\left(2\times\text{Pile / Pièce aimantée}\right)\mathbb{P}\left(\text{Pièce aimantée}\right)\\ &= \frac{1}{4}\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   et donc

$$\mathbb{P}\left(\text{Pièce aimantée / }2\times\text{Pile}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\text{Pièce aimantée}\right)}{\mathbb{P}\left(2\times\text{Pile}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

6. Soit X une variable aléatoire uniforme pouvant prendre ses valeurs dans $\{-2,-1,0,1,2\}$,

$$\mathbb{P}\left(X=-2\right) = \mathbb{P}\left(X=-1\right) = \mathbb{P}\left(X=0\right) = \mathbb{P}\left(X=1\right) = \mathbb{P}\left(X=2\right)$$

   (a) Que vaut $\mathbb{P}\left(X=0\right)$?
   $\frac{1}{5}$ *évidemment*

(b) Calculer l'espérance $E[X]$ et la variance $Var(X)$ de la variable X.

$$E[X] = \frac{(-2)+(-1)+0+1+2}{5} = 0$$

et

$$Var(X) = \frac{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

(c) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Calculer $E\left[\frac{X_1+X_2}{2}\right]$ et la variance $Var\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)$

Surtout ne pas se lancer dans le calcul fastidieux, mais utiliser le formulaire :

$$E\left[\frac{X_1+X_2}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(E[X_1]+E[X_2]\right) = 0$$

et

$$Var\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(Var(X_1)+Var(X_2)\right) = 1$$

(d) Soient $X_1, X_2, \dots X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Calculer $E\left[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right]$ et la variance $Var\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)$

Ce n"est guère plus difficile :

$$E\left[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\left(E[X_1]+\cdots+E[X_n]\right) = 0$$

et

$$Var\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(Var(X_1)+\cdots+Var(X_n)\right) = \frac{2}{n}$$

7. La probabilité d'atteindre une cible est $\frac{1}{4}$. Sur 7 essais, quelle est la probabilité d'atteindre la cible au moins deux fois ?

   En notant X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la cible est atteinte, la loi de X étant la loi binomiale $B\left(7,\frac{1}{4}\right)$, la probabilité d'atteindre la cible au moins deux fois vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\geq 2) &= 1-\mathbb{P}(X=0)-\mathbb{P}(X=1)\\ &= 1-C_7^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^7 - C_7^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^6\\ &= 1-\frac{3^7+7\,3^6}{4^7} = 4547/8192 \simeq 0,555\end{aligned}$$

   Combien d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'atteindre la cible soit plus grande que $\frac{2}{3}$?

En k essais, la probabilité d'atteindre au moins une fois la cible vaut $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k$ et on cherche k tel que $P(X \geq 1) \geq \frac{2}{3}$ i.e. $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k \geq \frac{2}{3}$ ce qui revient à trouver le plus petit k tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^k \leq \frac{1}{3}$ ce qu'on peut faire par tatonnement ou en écrivant $k = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)} \right\rceil = \left\lceil \frac{\log 3}{\log 4 - \log 3} \right\rceil = 4$

8. On range au hasard sur un rayon de bibliothèque les n tomes d'une encyclopédie. Quelle est la probabilité que les tomes 1, 2 et 3 soient côte à côte dans le bon ordre (1 puis 2 puis 3) ?

   Il y a $n!$ façon de ranger les n tomes. Il y a $n-2$ façons de placer les trois premiers volumes comme il faut et $(n-3)!$ façons de placer les autres, donc la probabilité cherchée vaut

$$\frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}} = \frac{(n-2)(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

9. Une urne contient N boules dont R sont rouges et $N-R$ sont noires. On tire un lot de n boules parmi les N. Expliquer pourquoi la probabilité que r boules soient rouges vaut

$$\frac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}} \text{ que l'on notait aussi en cours } \frac{C_R^r C_{N-R}^{n-r}}{C_N^n}$$

   C'est une formule de type $\frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}}$: Le nombre de cas possible est bien le nombre de façons de choisir n boules parmi N : C_N^n, alors que les cas favorables consistent à prendre r boules parmi les R boules rouges et $n-r$ boules parmi les $N-R$ boules noires.

   A.N. Une urne contient 5 boules dont 2 sont rouges. On tire un lot de 3 boules. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules rouges tirées. Calculer $\mathbb{P}(X=0)$, $\mathbb{P}(X=1)$, $\mathbb{P}(X=2)$ et $\mathbb{P}(X=3)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \frac{C_2^0 C_3^3}{C_5^3} = \frac{1 \times 1}{10} = \frac{1}{10} \\
\mathbb{P}(X=1) &= \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{2 \times 3}{10} = \frac{6}{10} \\
\mathbb{P}(X=2) &= \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = \frac{1 \times 3}{10} = \frac{3}{10} \textit{ évidemment} \\
\mathbb{P}(X=3) &= 0 \textit{ par définition du problème}
\end{aligned}$$

10. Un distributeur a reçu trois lots d'ordinateurs de son fournisseur en Syldavie, chacun contenant 12 PCs. Le fournisseur lui a dit que, suite à un problème sur la ligne de production, un lot noté A contient 8 PCs défectueux (sur les 12), un autre lot noté B contient 3 PC défectueux et le dernier lot noté C ne contient aucun PC défectueux.

Malheureusement, les lots sont étiquetés en Syldave et ne sont donc pas identifiables. On choisit un lot que l'on ouvre, et on y prélève un PC au hasard. Un stagiaire qui a quelques notions de Syldave croit savoir qu'il s'agit avec 50% de chance du lot A et avec 33% de chance du lot B. Plus précisément, et avec des notations évidentes

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}$$

(a) Quelle est la probabilité que le PC testé soit défectueux.
On note D la propriété d'être défectueux (et $\overline{D}$ son contraire) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D/A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D/B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D/C)\,\mathbb{P}(C) \\ &= \frac{8}{12}\frac{1}{2} + \frac{3}{12}\frac{1}{3} + 0\frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}\end{aligned}$$

(b) En supposant qu'il ne soit pas défectueux : quelle est la probabilité qu'il provienne du lot A ? du lot B ? du lot C ?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A/\overline{D}\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\overline{D}/A\right)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}\left(\overline{D}\right)} = \frac{\frac{4}{12}\frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{7} \\ \mathbb{P}\left(B/\overline{D}\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\overline{D}/B\right)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}\left(\overline{D}\right)} = \frac{\frac{9}{12}\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7} \\ \mathbb{P}\left(C/\overline{D}\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\overline{D}/C\right)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}\left(\overline{D}\right)} = \frac{1\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{7} \text{ (pour vérifier)}\end{aligned}$$