Généralisations : ondelettes continues 1.3

TS10

1.3.1 Intro

"A chaque classe de problème son ondelette".

Haar est adapté aux signaux échantillonnés avec une fréquence assez faible. Pour un signal continu, le résultat peut être amélioré. Pour cela, introduisons un cadre + général.

Déf Soit V_j $j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, une suite de sous-espaces de fonct° de $L^2(\mathbb{R})$.
$\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est appelé une analyse multirésolution avec la fonct° d'échelle ϕ si :

1) $V_j \subset V_{j+1}$
2) $\overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R})$
3) $\bigcap V_j = \{0\}$
4) $f(x) \in V_j$ ssi $f(2^{-j}x) \in V_0$
5) $\phi \in V_0$ et $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ bon de V_0

$$\left(\text{pour } \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx\right)$$

Exemple 1 $V_j = \{ f \in L^2(\mathbb{R})$; f ctes par morceaux sur les intervalles de la forme $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[\ \}$

et ϕ = fonct° échelle de Haar

donne un exemple d'analyse multirésolution.

Exemple 2 $V_j = \{ f \in L^2(\mathbb{R})$; f continue, linéaire / mx, tq les coins soient placés aux pts de $\mathbb{Z}/2^j \}$

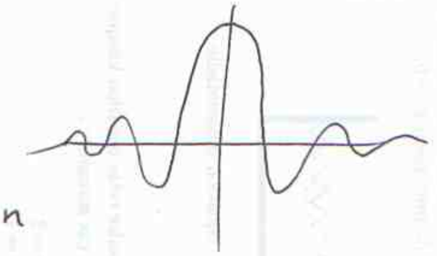
↳ fonct° splines linéaires.

$\varphi(x) = x+1$ si $-1 \le x \le 0$, $1-x$ si $0 < x \le 1$, 0 sinon

Seule 5) n'est pas vérifiée mais on peut y remédier.

Exemple 3 $\quad V_j = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \; ; \; \operatorname{supp} \hat{f} \subset [-2^j\pi, 2^j\pi] \}$ $\quad$ TS 11

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



↳ analyse multirésolution de Shannon

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, posons $g_{jk}(x) = 2^{j/2} g(2^j x - k)$ de telle sorte que $\|g_{jk}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ $\forall j, k \in \mathbb{Z}$.

Théorème $(\{V_j, j \in \mathbb{Z}\} ; \phi)$ analyse multirésolution.

alors $\left(\phi_{jk}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \; ; \; k \in \mathbb{Z} \right)$ forme une BON de V_j $\square$

Preuve

Soit $f(x) \in V_j \iff f(2^{-j}x) \in V_0$

$\iff f(2^{-j}x) = \sum_k a_k \phi(x - k)$

$\iff f(x) = \sum_k a_k \phi(2^j x - k)$ donc (ϕ_{jk}) engendre V_j

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{jk}(x) \overline{\phi_{jk'}(x)} \, dx = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^j x - k) \overline{\phi(2^j x - k')} \, dx$$

$$\overset{t = 2^j x}{=} \int_{\mathbb{R}} \phi(t - k) \overline{\phi(t - k')} \, dt = \delta_{kk'}$$

Théorème $(\{V_j, j \in \mathbb{Z}\} ; \phi)$ analyse multirésolution

Alors $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k)$ où $p_k = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x - k)} \, dx$

De plus, $\phi(2^{j-1}x - l) = \sum p_{k-2l} \phi(2^j x - k)$

$$\phi_{j-1,l}(x) = 2^{-1/2} \sum_k p_{k-2l} \phi_{jk}$$

où $\phi_{jk}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$ $\square$

Rq : • Si ϕ est à support compact, cette somme est finie

(TS12)

• Si ϕ est à valeurs réelles, $p_k \in \mathbb{R}$

Preuve

Puisque $V_0 \subset V_1$, $\phi(x) \in V_1$ donc

$$\phi(x) = \sum_k \tilde{p}_k \, \phi_{1k}(x) \quad \text{car } \phi_{1k} \text{ base de } V_1$$

$\langle \phi(x), \phi_{1k}(x) \rangle = \tilde{p}_k$ (ptés du P.S.) d'une part et de +

$= \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \overline{\phi(2x-k)} \, dx$ par déf. de ϕ_{1k}.

Posons $p_k = \sqrt{2}\, \tilde{p}_k$, on a obtenu

$$\phi(x) = \sum_k \cancel{2^{-1/2}} p_k \cdot \cancel{2^{1/2}} \phi(2x-k)$$

$x \rightarrow 2^{j-1}x - l$ donne $\phi(2^{j-1}x - l) = \sum_k p_k \phi(2^j x - 2l - k)$ $\quad k' = k + 2l$

$$= \sum_{k'} p_{k'-2l} \phi(2^j x - k')$$

La notat° adéquate donne $2^{\frac{-j-1}{2}} \phi_{j-1,l} = 2^{\frac{-j}{2}} \sum_k p_{k-2l} \, \phi_{jk}$

$$\text{soit} \quad \phi_{j-1,l} = 2^{-1/2} \sum_k p_{k-2l} \, \phi_{jk}$$ ▨

Exemple Haar

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1) \quad \text{donc} \quad p_0 = p_1 = 1, \text{ le reste nul.}$$

Lemme (admis : calculs)

1) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{k-2l} \overline{p_k} = 2\delta_{l0}$ BON

2) $\sum |p_k|^2 = 2$ en particulier

3) $\sum p_k = 2$

4a) $\sum p_{2k} = 1$

4b) $\sum p_{2k+1} = 1$

Théorème $(\{V_j ; j \in \mathbb{Z}\} ; \phi)$ analyse multirésolution (TS13)

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x - k)$$

$$W_j = \text{span}\{\psi(2^j x - k) ; k \in \mathbb{Z}\} \text{ où } \psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k}} \phi(2x - k)$$

alors $W_j \subset V_{j+1}$ vérifie $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$

$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ forme une BON de W_j

et enfin $L^2(\mathbb{R}) = \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots$

et $V_j = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \cdots \oplus W_0 \oplus V_0$

Décompositions et reconstructions

On veut décrire le passage de l'écriture de $f \in V_j$ à celle de $f \in V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, et vice-versa :

$f = \sum_k \langle f, \phi_{jk} \rangle \phi_{jk} \in V_j$ où $(\phi_{jk})_k$ est une base de V_j ($\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)$, cf th. précédent)

et $f = \sum_k \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle \phi_{j-1,k} + \sum_k \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \psi_{j-1,k}$, $(\psi_{jk})_k$ base de W_j défini justement par cette base, $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$.

La somme $W_{j-1} \oplus V_{j-1}$ étant orthogonale, f est écrit dans deux bases orthogonales

Lemme (égalité de Parseval)

Soit V un espace fonctionnel muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$ et d'une base $(u_k)_{k \in I}$ ($I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, dénombrable) Soient $f = \sum a_k u_k$ et $g = \sum b_k u_k$

Alors $\langle f, g \rangle = \sum_k a_k \overline{b_k}$

Preuve

$$\langle f, g \rangle = \langle \sum a_k u_k, \sum b_k u_k \rangle = \sum_{k,l} a_k \overline{b_l} \langle u_k, u_l \rangle$$
$$= \sum_k a_k \overline{b_k}.$$

Remarque

(TS 14)

Si $V = L^2_{\mathbb{C}}([0,2\pi[)$, une base est $(e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$ qui n'est pas normée mais est orthogonale :

$$\langle e^{ikx}, e^{ilx}\rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikx}\overline{e^{ilx}}\,dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x}\,dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k=l \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

i.e. $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une BON.

Le lemme dit que si f et g s'écrivent ds cette base (séries de Fourier) alors $f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum a_k e^{ik}$ et $g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum b_k e^{ikx}$

$$\langle f, g\rangle = a_k \overline{b_k}$$

et $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \sum_k |a_k|^2$

$$\| \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

Si on pose $\tilde{f}(x) = \sqrt{2\pi}\, f(x) = \sum_k a_k e^{ik}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tilde{f}(x)|\,dx = \sum_k |a_k|^2$$ qui est l'égalité de Parseval classique en analyse de Fourier.

Utilisons ce lemme pour notre problème :

$$\begin{aligned}
\langle f, \phi_{j-1,l}\rangle &= \langle \sum_k \langle f, \phi_{j,k}\rangle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,l}\rangle \\
&= \sum_k \langle f, \phi_{j,k}\rangle \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,l}\rangle \\
&= \sum_k \langle f, \phi_{j,k}\rangle \langle \phi_{j,k}, 2^{-1/2}\sum_i p_{i-2l}\,\phi_{j,i}\rangle \\
&= 2^{-1/2}\sum_k \overline{p_{k-2l}}\,\langle f, \phi_{j,k}\rangle
\end{aligned}$$

et $\langle f, \psi_{j-1,l}\rangle = \sum_k \langle f, \phi_{j,k}\rangle\langle \phi_{j,k}, \psi_{j-1,l}\rangle$

or
$$\begin{aligned}
\psi_{j-1,l}(x) &= 2^{j-1/2}\psi(2^{j-1}x - l) = 2^{j-1/2}\sum_i (-1)^i\,\overline{p_{1-i}}\,\phi(2^j x - 2l - i) \\
&= 2^{\frac{j-1}{2}}\sum_i (-1)^i\,\overline{p_{1-i}}\,\phi_{j,2l+i}(x)\,2^{-\frac{j}{2}} \qquad i' = 2l+i \\
&= 2^{-1/2}\sum_{i'} (-1)^{i'}\,\overline{p_{1-i'+2l}}\,\phi_{j,i'}(x)
\end{aligned}$$

TS15

donc $\langle f, \psi_{j-1,\ell} \rangle = \sum_k \langle f, \phi_{jk} \rangle \langle \phi_{jk}, 2^{-1/2} \sum_{i'} (-1)^{i'} \overline{p_{1-i'+2\ell}}\, \phi_{j,i'} \rangle$

$$= 2^{-1/2} \sum_k (-1)^k p_{1-k+2\ell} \langle f, \phi_{jk} \rangle$$

Les formules reviennent aux formules de décomposition.
On préfère en général exprimer f en fonct° des $\phi(2^j x - k)$ et $\psi(2^j x - k)$ plutôt que leur version normalisée.

Dans ce cas, $f = \sum_k \underbrace{2^{j/2} \langle f, \phi_{jk} \rangle}_{a_k^j} \underbrace{2^{-j/2} \phi_{jk}}_{\phi(2^j x - k)}$

et de même $f = \sum_k a_k^{j-1} \phi(2^{j-1} x - k) + \sum_k b_k^{j-1} \psi(2^{j-1} x - k)$

où $a_k^{j-1} = 2^{\frac{j-1}{2}} \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle$ et $b_k^{j-1} = 2^{\frac{j-1}{2}} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle$

d'où la formule de décomposition

$$\begin{cases} a_\ell^{j-1} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{p_{k-2\ell}}\, a_k^j \\ b_\ell^{j-1} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2\ell}\, a_k^j \end{cases}$$

Similairement, on trouve par la même technique (essentiellement le lemme de Parseval) les formules de reconstruction:

$$a_k^j = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} p_{k-2\ell}\, a_\ell^{j-1} + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k+2\ell}}\, b_\ell^{j-1}$$

Une étude d'un signal par analyse multirésolution comporte toujours les mêmes étapes :
- échantillonnage (double de la freq. de Nyquist)
- décomposition : on itère l'algorithme jusqu'à $j = j_0$ (par exemple 0, dépend de la longueur du signal)
- traitement : compression, filtrage, recherche de caractéristiques, localisation de discontinuités ...
- reconstruction (éventuellement).

Application Analyse multirésolution de Shannon 8.3 TS16

Rappelons le très important théorème de Shannon qui dit que si un signal possède une bande de fréquence limitée ($\operatorname{supp}\hat{f} \subset I$ intervalle borné) alors on peut complètement caractériser ce signal par son ~~échantillonnage~~ signal échantillonné à la fréquence adéquate :

Théorème de Shannon - Whittaker

Soit $f \in L^2$, tq $\hat{f}(\lambda)$ soit continue dérivable /mx et que $L^2_c(\mathbb{R})$ $\operatorname{supp}\hat{f} \subset [-\Omega, \Omega]$. Alors

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{j\pi}{\Omega}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega}{\pi}t - j\right) \qquad \text{(cvgce uniforme)}$$

où $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ si $x \neq 0$, 1 si $x = 0$ (sinus cardinal)

i.e. f est complètement déterminée par ses valeurs aux points $t_j = j\frac{\pi}{\Omega}$, $j \in \mathbb{Z}$ ce qui correspond à un échantillonnage avec une fréquence $\frac{2\pi}{\pi/\Omega} = 2\Omega$.

Posons donc $V_0 = \{ f \in L^2_c(\mathbb{R})\ ;\ \operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-\pi, \pi] \}$

et $V_j = \{ f \in L^2_c(\mathbb{R})\ ;\ \operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-2^j\pi, 2^j\pi] \}$

de sorte que $V_j \subset V_{j+1}$ ✓

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad ✓$$

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

Un peu plus délicat : on fait $\hat{f} \cdot \varphi_n$ $\operatorname{Supp}\hat{\varphi}_n \subset [-2^j\pi, 2^j\pi]$ continue et on passe à la limite, ou bien on utilise jusqu'au le th. précédent

Soit $f \in V_j$, $\mathcal{F}\left(f(2^{-j}t)\right)(\lambda) \underset{①}{=} \underset{②}{2^j} \mathcal{F}(f(t))(2^j\lambda)$ d'après le résultat classique d'analyse de Fourier. Si $|\lambda| > \pi$ dans ① alors $|2^j\lambda| > 2^j\pi$ donc $\hat{f}(2^j\lambda) = 0$ dans ② donc $f(2^{-j}t) \in V_0$

Le dernier point à vérifier est qu'il faut trouver une BON de V_0, elle est donnée par le th. de Shannon : TS 17

Soit $f \in V_0$ alors on applique le th. avec $\Omega = \pi$ donc

$$f(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j)\,\mathrm{sinc}(t-j)$$

donc $\phi(t) = \mathrm{sinc}(t)$ est tq $\{\phi(t-j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ engendre V_0.

Un calcul montre aussi que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(t-j)\,\mathrm{sinc}(t-k)\,dt = \delta_{jk}$$

ce qui montre l'orthogonalité. (cf exercice)

Il existe donc p_k tq $\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k\,\phi(2x-k)$, que nous allons déterminer par le th. de Shannon.

Prenons $\Omega = 2\pi$:

$$f(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j/2)\,\mathrm{sinc}(2t-j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j/2)\,\phi(2t-j)$$

On applique le théorème à ϕ dont le support est bien ds $[-2\pi, 2\pi]$ (il est dans $[-\pi,\pi]$) :

$$\phi(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi(j/2)\,\phi(2t-j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\sin\frac{\pi j}{2}}{\pi j/2}\,\phi(2t-j)$$

nul si j pair $\neq 0$
positif si $j = 1, 5, \ldots$
négatif si $j = 3, 7, \ldots$

$$= \underbrace{\phi(2t)}_{j=0} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k \times 2}{\pi \times (2k+1)}\,\phi(2t-2k-1)$$

d'où les p_k par identification, ce qui permet de calculer aussi ψ et de terminer la description complète de l'analyse multi-résolution de Shannon.

Il est quelquefois difficile de vérifier que $\phi(x-k)$ (TS 18)
est une famille orthonormale dans $L^2(\mathbb{R})$.
On va donner un Théorème qui transpose cette ppté dans le domaine de Fourier.
On rappelle que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$

<u>Théorème</u> $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ famille orthonormale ssi

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\xi + 2k\pi) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad \text{(admis)}$$