Traitement Numérique du Signal

# TD 3

## Systèmes linéaires

**Rappels de cours et précisions.**

On notera $T_e$ la période d'échantillonnage et $F_e = 1/T_e$ la fréquence d'échantillonnage d'un signal analogique. Le signal numérique s'écrit donc $X_e(n) = X(nT_e)$.

La **fréquence numérique** d'un signal échantillonné de fréquence analogique $f$ est $k = f/F_e$. Le **théorème de Shannon** nous indique que $k$ n'a de sens qu'entre 0 et $1/2$. De même, la **pulsation numérique** est définie par $\omega = 2\pi k = 2\pi f/F_e$.

La **réponse impulsionnelle** $h(n)$ d'un système linéaire est la réponse temporelle d'un système à une impulsion d'amplitude 1 au temps 0

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)u(n-k)$$

La **fonction de transfert** est la transformée en Z de la réponse impulsionnelle

$$H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)Z^{-n}$$

En Z, on a la relation entre l'entrée et la sortie $Y(Z) = H(Z)U(Z)$.

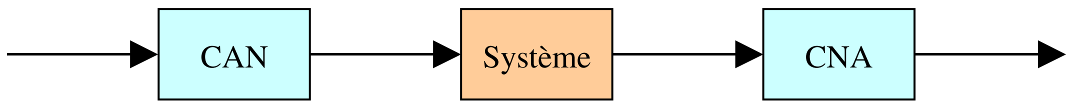
Considérons un système numérique dont la fonction de transfert est notée $H(Z)$. La réponse de ce système à une entrée périodique $u(n) = \cos(\omega n)$ est une sortie périodique de même période mais avec un gain et un déphasage, i.e. $y(n) = A\cos(\omega n - \phi)$ où $A$ et $\phi$ dépendent de $\omega$. En passant à la transformée de Fourier discrète, en notant $F(\omega) = H(\exp(i\omega))$, on établit les relations :

$$|F(\omega)| = A$$
$$\arg(F(\omega)) = \phi$$

$|F(\omega)|$ s'appelle la réponse fréquentielle et $\arg(F(\omega))$ est le déphasage.

**Exercice 1.**

On étudie le système de traitement numérique suivant




dans lequel on note

- $X(t)$ le signal analogique entrant dans le CAN
- $x(n)$ le signal numérique sortant du CAN et entrant dans le système numérique supposé linéaire. On notera $T_e$ et $F_e$ la période d'échantillonnage et la fréquence d'échantillonnage respectivement.
- $y(n)$ le signal numérique après traitement numérique, en sortie du système
- $Y(t)$ le signal analogique à la sortie du CAN.

a) Quelles étapes indispensables de la chaîne de traitement n'a-t-on pas représenté ici ?

On suppose que le système réalise le traitement $y(n) = \frac{1}{4}\left(x(n) + x(n-2)\right)$.

b) Rappeler les relations entre $X(t)$ et $x(n)$ et entre $Y(t)$ et $y(n)$.

c) Calculer la réponse impulsionnelle $h(n)$ de ce système (calculer numériquement et tracer). Que pouvez-vous dire de sa causalité ? sa stabilité ? Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ?

d) Calculer la fonction de transfert $H(Z)$ de ce système.

e) Tracer la réponse fréquentielle de ce système. Eventuellement, dire si c'est un filtre passe-bas, passe-haut, … et donner sa/ses fréquence de coupure(s).

f) On applique à l'entrée de ce système un signal sinusoïdale de fréquence $f$, $X(t) = \cos(\omega)$, où $\omega = 2\pi f$. Calculer la sortie du système en utilisant directement la relation entre $y(n)$ et $(u(n))_n$. Montrer explicitement que $y(n) = Y_0 \cos(\omega n T_e - \phi)$. Retrouver la réponse fréquentielle.

**Exercice 2.** On considère maintenant le système $y(n) = \frac{1}{3}\left(x(n) + x(n-1) + x(n-2)\right)$. Reprendre les questions b) à f) de l'exercice précédent. Cette fois, l'usage d'une calculatrice graphique est conseillé, pour la question e).

**Exercice 3.** On considère maintenant le système $y(n) = x(n) + \frac{3}{2}\, y(n-1) - \frac{15}{16}\, y(n-2)$.

Reprendre les questions b) à e) de l'exercice 1. Pour la question c), il faudra résoudre une récurrence linéaire par la méthode de la fonction caractéristique.

**Exercice 4.** On considère maintenant le système $y(n) = 0{,}6\, y(n-1) + \left(x(n) - (n-1)\right)$. Reprendre les questions b) à f) de l'exercice précédent.