TD1

Filtres de Wiener

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1. On procède comme indiqué dans le cours:

$$\begin{aligned}\Gamma_X(0) &= E[X_n X_n] \\ &= E[(\theta + W_n)(\theta + W_n)] \\ &= E\left[\theta^2\right] + 2\underbrace{E[\theta W_n]}_{=0} + E\left[W_n^2\right] = \sigma^2 + 1\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\Gamma_X(1) &= E[X_n X_{n-1}] \\ &= E[(\theta + W_n)(\theta + W_{n-1})] \\ &= E\left[\theta^2\right] + \underbrace{E[\theta W_n] + E[\theta W_{n-1}] + E[W_n W_{n-1}]}_{=0} = \sigma^2\end{aligned}$$

et ainsi de suite, $\Gamma_X(k) = \sigma^2$, $k \geq 1$. Ensuite, on calcule les covariances entre θ et les X_{n-j}:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta X}(j) &= E[\theta X_{n-j}] \\ &= E[\theta(\theta + W_{n-j})] \\ &= E\left[\theta^2\right] + \underbrace{E[\theta W_{n-j}]}_{=0} = \sigma^2\end{aligned}$$

Finallement, on obtient le système matriciel

$$\begin{pmatrix} \tau^2+\sigma^2 & \tau^2 & \cdots & \tau^2 \\ \tau^2 & \tau^2+\sigma^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \tau^2 \\ \tau^2 & \cdots & \tau^2 & \tau^2+\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^2 \\ \tau^2 \\ \vdots \\ \tau^2 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\begin{aligned}\left(\tau^2+\sigma^2\right)a_0 + \tau^2 a_1 + \cdots + \tau^2 a_{p-1} &= \tau^2 \\ \tau^2 a_0 + \left(\tau^2+\sigma^2\right)a_1 + \cdots + \tau^2 a_{p-1} &= \tau^2 \\ &\vdots \\ \tau^2 a_0 + \tau^2 a_1 + \cdots + \left(\tau^2+\sigma^2\right)a_{p-1} &= \tau^2\end{aligned}$$

On fait la somme des p équations terme à terme ce qui donne

$$\left(p\tau^2+\sigma^2\right)\sum_{i=0}^{p-1} a_i = p\tau^2$$

et par symétrie, pour tout i de 0 à $p-1$

$$a_i = \frac{\tau^2}{p\tau^2+\sigma^2}$$

et donc le filtre de Wiener s'écrit

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{p + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \sum_{i=0}^{p-1} X_{n-i}$$

L'information a priori est présente dans le terme $\frac{\sigma^2}{\tau^2}$ puisque l'estimateur sans connaissance a priori serait naturellement $\widehat{\theta} = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} X_{n-i}$.

Corrigé de l'exercice 2. De même,

$$\Gamma_X(0) = E[X_n X_n] = E\left[S_n^2\right] + 2\underbrace{E[S_n W_n]}_{=0} + E\left[W_n^2\right] = \sigma^2 + 1$$

puis

$$\Gamma_X(1) = E[X_n X_{n-1}] = E[S_n S_{n-1}] + E[S_{n-1} W_n] + E[S_n W_{n-1}] + E[W_n W_{n-1}] = 0$$

et ainsi de suite, $\Gamma_X(k) = 0$, $k \geq 1$. Ensuite, on calcule les covariances entre θ et les X_{n-j}:

$$\Gamma_{SX}(j) = E[S_n X_{n-j}] = E[S_n S_{n-j}] + \underbrace{E[S_n W_{n-j}]}_{=0} = \sigma^2 \text{ si } j = 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

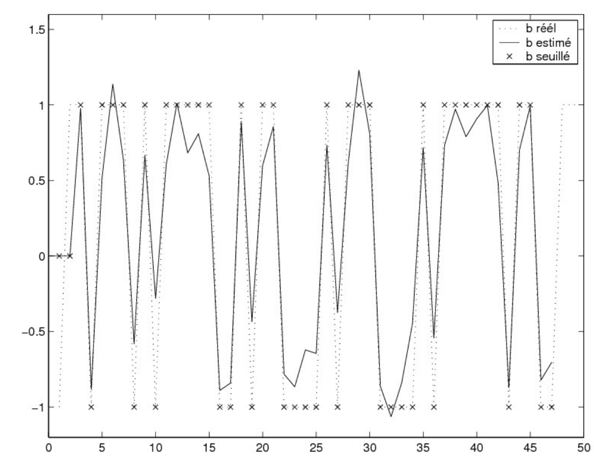
Finallement, on obtient un système matriciel qui se réduit à

$$\begin{aligned} \left(\tau^2 + \sigma^2\right) a_0 &= \sigma^2 \\ \left(\tau^2 + \sigma^2\right) a_1 &= 0 \\ &\vdots \\ \left(\tau^2 + \sigma^2\right) a_{p-1} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne $a_0 = \frac{\sigma^2}{\tau^2 + \sigma^2}$ et $a_j = 0$ pour $j \geq 1$ et donc le filtre de Wiener s'écrit $\hat{S}_n = \frac{\sigma^2}{\tau^2 + \sigma^2} X_x$

Corrigé "Matlab" de l'exercice 3. Implémentation du filtre de Wiener calculé en TD:

```
N=50;b=2*floor(2*rand(N+1,1))-1;
W=randn(N,1);alpha=0.5;sigma=0.2;
X=b((1:N)+1)+alpha*b(1:N)+sigma*W;
p=5;d=4;
d0=(1+alpha+sigma^2)*ones(p,1);
d1=alpha*ones(p-1,1);
G=diag(d0)+diag(d1,1)+diag(d1,-1);
g=zeros(p,1);g(d-1)=alpha;g(d)=1;a=G\g;
bhat=zeros(N,1);
for i=p+1:N,bhat(i)=a'*X(i-(1:p));end,
plot(1:N,b((1:N)),'b:',(1:N)-d+1,bhat,'g',(1:N)-d+1,sign(bhat),'rx'),
legend('b r\'{e}\'{e}l','b estim\'{e}','b seuill\'{e}');
axis([0,50,-1.2,1.6]),
```


b réél
b estimé
b seuillé
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50