TD1

Filtres de Wiener

1. On considère un processus de la forme $X_n = \theta + W_n$ où W_n est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance 1 tel que W_n et W_j sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que θ suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendante de $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

   Caractériser le filtre de Wiener permettant d'estimer θ à partir de X_n, X_{n-1}, ..., X_{n-p+1}. On demande de calculer les coefficients *explicitement*.

2. On considère un processus de la forme $X_n = S_n + W_n$ où W_n est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance μ^2 tel que W_n et W_j sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que S_n suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendante de $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et que de même, S_n et S_j sont indépendants si $n \neq j$.

   Caractériser le filtre de Wiener permettant d'estimer S_n à partir de X_n, X_{n-1}, ..., X_{n-p+1}. On demande de calculer les coefficients explicitement.

3. On considère un processus de la forme $X_n = b_n + \alpha b_{n-1} + W_n$ où W_n est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 tel que W_n et W_j sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que b_n est une variable aléatoire uniforme à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendante de $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et que de même, b_n et b_j sont indépendants si $n \neq j$ ($\mathbb{P}(b_n = 1) = \mathbb{P}(b_n = -1) = \frac{1}{2}$). Construire un filtre qui estime b_{n-d}.

4. On considère un processus de la forme $X_n = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} + W_n$ où W_n est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 tel que W_n et W_j sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que S_n suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendante de $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et que de même, S_n et S_j sont indépendants si $n \neq j$.

   (a) Donner l'équation de Wiener–Hopf permettant de calculer les coefficients du filtre de Wiener d'ordre 3 permettant d'estimer S_{n-2} à partir de X_n, X_{n-1} et X_{n-2}.

   (b) Vérifier que si $\sigma = 0$, la solution est

$$\hat{S}_{n-1} = -\frac{X_n + 3X_{n-1} + X_{n-2}}{5}$$