EXAMEN DE MA4 | Lundi 21 Mars 2005
INFOTRONIQUE $2^{\text{ième}}$ année | Durée 1H

Estimation, Identification et Filtrage[1]

1. On considère un processus X_n qui modélise un phénomène physique échantillonné. Pour des raisons liées à l'expérience, on a calculé
$$Z_n = 3\,X_n - X_{n-1}$$
et le calcul de la matrice de covariance de Z_n donne
$$\Gamma_Z = \begin{pmatrix} 4,9824 & -1,9970 & -0,0068 & 0,0186 & \cdots \\ -1,9970 & 4,9824 & -1,9970 & -0,0068 & \cdots \\ -0,0068 & -1,9970 & 4,9824 & -1,9970 & \cdots \\ 0,0186 & -0,0068 & -1,9970 & 4,9824 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$
   (a) Préciser la nature du processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (AR(p), MA(q), ARMA(p,q) ?) ainsi que le(s) ordre(s) p et/ou q.
   (b) Préciser les coefficients que vous pouvez déterminer et indiquer (sans détailler) une méthode pour calculer ceux que vous ne pouvez pas déterminer facilement.
   (c) Avec un peu de calculs supplémentaires, vous devez pouvoir déterminer tous les coefficients.

2. On considère un processus de la forme $X_n = S_n + W_n$ où W_n est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance μ^2 tel que W_n et W_j sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que S_n suit une loi $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$ indépendante de $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et que de même, S_n et S_j sont indépendants si $n \neq j$.

   Caractériser le filtre de Wiener permettant d'estimer S_n à partir de X_n, X_{n-1}, ..., X_{n-p+1}. On demande de calculer les coefficients explicitement.

3. On considère le système pour $k \geq 1$:
$$\left\{\begin{array}{lcl} x_k & = & x_{k-1} \\ y_k & = & x_k + \eta_k \end{array}\right.$$
où x_k est l'état inconnu, y_k est la mesure à l'instant k et η_k est un bruit blanc gaussien $\mathcal{N}\left(0,r^2\right)$.
   (a) En appliquant le filtre de Kalman avec $Q = 0$ et $R = r^2$, et en supposant que $\hat{x}_0 = 0$ et $P_0 = \sigma^2$, montrer (par récurrence) que
$$P_k = \frac{r^2\sigma^2}{r^2 + k\sigma^2} \text{ et } G_k = \frac{1}{r^2}P_k$$
   (b) En déduire que
$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + \frac{\sigma^2}{r^2 + k\sigma^2}\,(y_k - \hat{x}_{k-1})$$
   (c) [2]Montrer que si σ est très grand ($\sigma \to +\infty$) alors $\hat{x}_k$ est très proche de la moyenne empirique $m_k \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_j$ des y_k ($\hat{x}_k \overset{\sigma\to+\infty}{\longrightarrow} m_k$).

[1]Les documents sont autorisés, la rédaction doit être précise *et* concise.
[2]Cette question est un peu difficile