EXAMEN DE MA4 — Lundi 21 Mars 2005

INFOTRONIQUE 2ième année — Durée 1H

Estimation, Identification et Filtrage
Corrigé

1. **On considère un processus X_n qui modélise un phénomène physique échantillonné. Pour des raisons liées à l'expérience, on a calculé**

$$Z_n = 3\,X_n - X_{n-1}$$

et le calcul de la matrice de covariance de Z_n donne

$$\Gamma_Z = \begin{pmatrix} 4,9824 & -1,9970 & -0,0068 & 0,0186 & \cdots \\ -1,9970 & 4,9824 & -1,9970 & -0,0068 & \cdots \\ -0,0068 & -1,9970 & 4,9824 & -1,9970 & \cdots \\ 0,0186 & -0,0068 & -1,9970 & 4,9824 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(a) **Préciser la nature du processus $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (AR(p), MA(q), ARMA(p,q) ?) ainsi que le(s) ordre(s) p et/ou q.**

$Z_n = 3\,X_n - X_{n-1}$ est clairement un processus MA(1) au vu des coefficients nuls dans Γ_Z à partir de la "troisième diagonale". En écrivant $X_n - \frac{1}{3}X_{n-1} = \frac{1}{3}Z_n$, on voit que $X_n$est un processus ARMA(1,1) donc de la forme:

$$X_n + a_1 X_{n-1} \left(= \frac{1}{3}Z_n\right) = \sigma_0 W_n + \sigma_1 W_{n-1}$$

(b) **Préciser les coefficients que vous pouvez déterminer et indiquer (sans détailler) une méthode pour calculer ceux que vous ne pouvez pas déterminer facilement.**

D'après (a), $a_1 = -\frac{1}{3}$. Pour déterminer σ_0 et σ_1, on utilise usuellement la méthode de Cholesky vue en cours.

(c) **Avec un peu de calculs supplémentaires, vous devez pouvoir déterminer tous les coefficients.**

Notons $Z_n = b_0 W_n + b_1 W_{n-1}$. Ici, on voit (en arrondissant à 1% près) que

$$\begin{aligned} E\left[Z_n^2\right] &= 4,9824 \simeq 5 \\ &= E\left[\left(b_0 W_n + b_1 W_{n-1}\right)^2\right] = b_0^2 + b_1^2 \\ E\left[Z_n Z_{n-1}\right] &= -1,9970 \simeq -2 \\ &= E\left[\left(b_0 W_n + b_1 W_{n-1}\right)\left(b_0 W_{n-1} + b_1 W_{n-2}\right)\right] = b_0 b_1 \end{aligned}$$

d'où $b_0 = 1$ et $b_1 = -2$ (par exemple, il existe aussi toutes les solutions symétriques de cette dernière). En tenant compte de (a) où on a remarqué que $X_n - \frac{1}{3}X_{n-1} = \frac{1}{3}Z_n$, on en déduit que le porcessus X_n s'écrit

$$X_n - \frac{1}{3}X_{n-1} = \frac{1}{3}W_n - \frac{2}{3}W_{n-1}$$

donc les coefficients sont $a_1 = -\frac{1}{3}$, $\sigma_0 = \frac{1}{3}$ et $\sigma_1 = -\frac{2}{3}$

2. **On considère un processus de la forme $X_n = S_n + W_n$ où W_n est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance μ^2 tel que W_n et W_j sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que S_n suit une loi $N\left(0, \sigma^2\right)$ indépendante de $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et que de même, S_n et S_j sont indépendants si $n \neq j$. Caractériser le filtre de Wiener permettant d'estimer S_n à partir de X_n, X_{n-1}, ..., X_{n-p+1}. On demande de calculer les coefficients explicitement.**

   On procède comme dans le cours et les TDs:

$$\begin{aligned}\Gamma_X(0) &= E[X_n X_n] \\ &= E[(S_n + W_n)(S_n + W_n)] \\ &= E\left[S_n^2\right] + 2\underbrace{E[S_n W_n]}_{=0} + E\left[W_n^2\right] = \sigma^2 + 1\end{aligned}$$

   puis

$$\begin{aligned}\Gamma_X(1) &= E[X_n X_{n-1}] \\ &= E[(S_n + W_n)(S_{n-1} + W_{n-1})] \\ &= E[S_n S_{n-1}] + E[S_{n-1} W_n] + E[S_n W_{n-1}] + E[W_n W_{n-1}] = 0\end{aligned}$$

   et ainsi de suite, $\Gamma_X(k) = 0$, $k \geq 1$. Ensuite, on calcule les covariances entre θ et les X_{n-j}:

$$\begin{aligned}\Gamma_{SX}(j) &= E[S_n X_{n-j}] \\ &= E[S_n(S_{n-j} + W_{n-j})] \\ &= E[S_n S_{n-j}] + \underbrace{E[S_n W_{n-j}]}_{=0} = \sigma^2 \text{ si } j = 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}\end{aligned}$$

  Finallement, on obtient le système matriciel

$$\begin{pmatrix} \tau^2+\sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau^2+\sigma^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tau^2+\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\begin{aligned}\left(\tau^2+\sigma^2\right) a_0 &= \sigma^2 \\ \left(\tau^2+\sigma^2\right) a_1 &= 0 \\ &\vdots \\ \left(\tau^2+\sigma^2\right) a_{p-1} &= 0\end{aligned}$$

ce qui donne

$$a_0 = \frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2} \text{ et } a_j = 0 \text{ pour } j \geq 1$$

et donc le filtre de Wiener s'écrit

$$\hat{S}_n = \frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2} X_x$$

3. **On considère le système pour $k \geq 1$:**

$$\left\{\begin{array}{lll} x_k &=& x_{k-1} \\ y_k &=& x_k + \eta_k \end{array}\right.$$

   où x_k est l'état inconnu, y_k est la mesure à l'instant k et η_k est un bruit blanc gaussien $N\left(0, r^2\right)$.

(a) **En appliquant le filtre de Kalman avec $Q = 0$ et $R = r^2$, et en supposant que $\hat{x}_0 = 0$ et $P_0 = \sigma^2$, montrer (par récurrence) que**

$$P_k = \frac{r^2\sigma^2}{r^2 + k\sigma^2} \text{ et } G_k = \frac{1}{r^2} P_k$$

On applique les équations de Kalman avec $A = 1$, $C = 1$ ce qui donne

$$P_{k^-} = AP_{k-1}A^T + Q = P_{k-1}$$

soit

$$\begin{aligned} G_k &= P_{k-1}C^T \left(CP_{k-1}C^T + R\right)^{-1} = \frac{P_{k-1}}{P_{k-1} + r^2} \\ P_k &= (I - G_kC)\, P_{k-1} = \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_{k-1} + r^2}\right) P_{k-1} = \frac{r^2 P_{k-1}}{P_{k-1} + r^2} = r^2 G_k \end{aligned}$$

Vu ce qui est demandé, il suffit donc de montrer que $P_k = \frac{r^2\sigma^2}{r^2+k\sigma^2}$ par récurrence:
Au rang 0, $P_0 = \sigma^2$ est vrai donc supposons au rang $k-1$ que $P_{k-1} = \frac{r^2\sigma^2}{r^2+(k-1)\sigma^2}$ et voyons au rang k:

$$\begin{aligned} P_k = \frac{r^2 P_{k-1}}{P_{k-1} + r^2} &= \frac{r^2 \frac{r^2\sigma^2}{r^2+(k-1)\sigma^2}}{\frac{r^2\sigma^2}{r^2+(k-1)\sigma^2} + r^2} \\ &= \frac{r^4\sigma^2}{r^2\sigma^2 + r^2\left(r^2 + (k-1)\,\sigma^2\right)} \\ &= \frac{r^2\sigma^2}{\sigma^2 + r^2 + (k-1)\,\sigma^2} = \frac{r^2\sigma^2}{r^2 + k\sigma^2} \end{aligned}$$

(b) **En déduire que**

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + \frac{\sigma^2}{r^2 + k\sigma^2} \left(y_k - \hat{x}_{k-1}\right)$$

C'est immédiat, puisque les équations de Kalman donnent

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k^-} &= \hat{x}_{k-1} \text{ et} \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_{k-1} + G_k \left(y_k - \hat{x}_{k-1}\right) \\ &= \hat{x}_{k-1} + \frac{1}{r^2} \frac{r^2\sigma^2}{r^2 + k\sigma^2} \left(y_k - \hat{x}_{k-1}\right) \\ &= \hat{x}_{k-1} + \frac{\sigma^2}{r^2 + k\sigma^2} \left(y_k - \hat{x}_{k-1}\right) \end{aligned}$$

(c) **Montrer que si σ est très grand ($\sigma \to +\infty$) alors $\hat{x}_k$ est très proche de la moyenne empirique $m_k \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} y_j$ des y_k ($\hat{x}_k \overset{\sigma\to+\infty}{\longrightarrow} m_k$).**

Notons que si σ est grand, $\frac{\sigma^2}{r^2+k\sigma^2} = \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$ donc

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k &= \hat{x}_{k-1} + \frac{1}{k}\left(y_k - \hat{x}_{k-1}\right) + o\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \\
&= \frac{k-1}{k}\hat{x}_{k-1} + \frac{1}{k}y_k + o\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \\
&= \frac{k-1}{k}\left(\frac{k-2}{k-1}\hat{x}_{k-2} + \frac{1}{k-1}y_{k-1} + o\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\right) + \frac{1}{k}y_k + o\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \\
&= \frac{k-2}{k}\hat{x}_{k-2} + \frac{1}{k}y_{k-1} + \frac{1}{k}y_k + o\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{k}\hat{x}_1 + \frac{1}{k}\sum_{j=2}^{k} y_j + \left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_j + \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

si bien que

$$\hat{x}_k \simeq \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_j = m_k \text{ quand } \sigma \text{ est grand}$$