Méthodes mathématiques pour la physique

fiche de TD n°8
(la dernière !)

1. On définit l'exponentielle formelle pour $t \in \mathbb{C}$ fixé par
$$\operatorname{Exp}(tx) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} x^n$$
   (a) Montrer que
      i. $\operatorname{Exp}(0 \cdot x) = 1$,
      ii. $\operatorname{Exp}(tx) \cdot \operatorname{Exp}(t'x) = \operatorname{Exp}((t+t')x)$,
      iii. $\frac{1}{\operatorname{Exp}(tx)} = \operatorname{Exp}((-t)x)$,
      iv. $\frac{d}{dx} \operatorname{Exp}(tx) = t \cdot \operatorname{Exp}(tx)$
   (b) Montrer que les solutions formelles de l'équation $y' = ay$ (où a est une série formelle en x) sont les séries formelles $y = \lambda \operatorname{Exp}\left(\int a\right)$ (expliciter cette écriture). Résoudre $y' = ay + b$, $y(0) = \lambda_0$ par variation de la constante. Montrer que la solution obtenue est unique.
2. Montrer que $\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ par le procédé suivant : l'équation $y' = y$ avec $y(0) = 1$ a une solution fonction e^x et une solution formelle $\operatorname{Exp}(x)$ de rayon de convergence $R = +\infty$ d'où l'égalité... En déduire les développements en série entière de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.
3. Appliquer la méthode de l'exercice précédent à l'équation $y' = iy$ avec $y(0) = 1$. En déduire les développements en série entière de $\cos x$ et $\sin x$.
4. On rappelle que le coefficient binomial généralisé est défini par
$$\mathrm{C}_\alpha^n \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$
   et on a $(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \mathrm{C}_\alpha^n x^n$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ de rayon de convergence $R = 1$.
   (a) On suppose que $\alpha = -p$, $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$C_{-p}^n = (-1)^n \mathrm{C}_{n+p-1}^{p-1} = (-1)^n \mathrm{C}_{n+p-1}^n$$
   En déduire que si $|x| < 1$,
$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n\geq 0} \mathrm{C}_{n+p-1}^{p-1} x^n$$
      i. [1]Montrer que le nombre de partitions d'un entier n en p entiers est C_{n+p-1}^{p-1}.
      ii. Montrer que C_{n+p-1}^{p-1} est aussi la dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré n en p variables.

[1]Cette question et les deux suivantes sont un peu difficiles.

iii. En écrivant $\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \frac{1}{(1-x)} \frac{1}{(1-x)^p}$, montrer que $1 + \mathrm{C}_p^{p-1} + \mathrm{C}_{p+1}^{p-1} + \cdots + \mathrm{C}_{p+n-1}^{p-1} = \mathrm{C}_{p+n}^{p}$. En déduire que la dimension de l'espace des polynômes de degré $\leq n$ en p variables.

(b) On suppose que $\alpha = \frac{1}{2}$, montrer que

$$C_{\frac{1}{2}}^n = (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$$

et en déduire les développements en série entière de $\sqrt{1+x}$ et $\sqrt{1-x}$.

5. **Intégrales de Wallis.**

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

(a) Montrer que la suite I_n est décroissante et positive, en déduire qu'elle a une limite.

(b) En intégrant par parties, montrer que $n\, I_n = (n-1)\ I_{n-2}$ dès que $n \geq 2$.

(c) En utilisant (b), montrer que

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} \tag{1}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)} \tag{2}$$

(d) Soit $v_n = nI_nI_{n-1}$; en utilisant (b), montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{\pi}{2}$.

(e) Multiplier les inégalités $I_n \leq I_{n-1}$ et $I_{n+1} \leq I_n$ par I_n pour en déduire que pour $n \geq 1$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\,(n+1)}} \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \tag{3}$$

(f) En déduire que $I_n \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

6. [2]Appliquer les résultats des exercices 4 et 5 pour étudier le développement en série entière de $\sqrt{1-x}$ en $x = \pm 1$ (on utilisera l'équivalent de I_{2n} pour prouver l'absolue convergence). En déduire les formules

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} = \frac{1}{2} \text{ et } \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$

7. Montrer que si $|t| < 1$, on a $\sum_{n\geq 0} t^n \mathrm{e}^{in\theta} = \frac{1}{1-t\mathrm{e}^{i\theta}}$. En déduire que

$$\sum_{n\geq 0} t^n \cos n\theta = \frac{1 - t\cos\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2} \text{ et } \sum_{n\geq 0} t^n \sin n\theta = \frac{t\sin\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2}$$

Soient P_n et Q_n les polynômes de Tchebychev de première et deuxième espèce ($P_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ et $Q_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ resp.), montrer que si $|t| < 1$ et $|x| \leq 1$, on a

$$\sum_{n\geq 0} P_n(x)\, t^n = \frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2} \text{ et } \sum_{n\geq 0} Q_n(x)\, t^n = \frac{1}{1 - 2tx + t^2}$$

8. Soit k tel que $|k| < 1$ et

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

(a) Montrer que (avec les notations de l'exercice 5 (1))

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \frac{2}{\pi} \sum_{n\geq 0} I_{2n}\, k^{2n} \sin^{2n} t$$

[2]Cette question est réservée aux étudiants qui ont vu l'absolue convergence.

(b) Montrer (par exemple en utilisant (3)) que

$$\left|\frac{2}{\pi} I_{2n}\, k^{2n}\, \sin^{2n} t\right| \leq k^{2n}$$

On peut donc intégrer terme à terme par rapport à t.

(c) Montrer que

$$K(k) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 0} (I_{2n})^2\, k^{2n} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n \geq 1}\left(\frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}\right)^2 k^{2n}\right)$$

(d) Montrer que $\sum_{n \geq 1}\left(\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}\right)^2 k^{2n} \leq \frac{k^2}{1-k^2}$ et en déduire une majoration de l'erreur commise en approximant K par $\frac{\pi}{2}$. Que peut-on en déduire quant à l'approximation de la période du pendule par $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ dans le cas des petites oscillations ?

(e) En utilisant $I_n^2 \geq \frac{\pi}{2(n+1)}$, montrer que $I_{2n}^2 \geq \frac{\pi}{4(n+1)}$ et en déduire que

$$K(k) \geq \frac{1}{2k^2} \sum_{n \geq 0} \frac{\left(k^2\right)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2k^2} \log\left(\frac{1}{1-k^2}\right)$$

puis que $K(k) \overset{k \to \pm 1}{\longrightarrow} +\infty$.

9. **Suite de Fibonacci.** On considère la série formelle définie par le développement au voisinage de 0 de la fonction suivante

$$\frac{1}{1-x-x^2} \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n \geq 0} F_n x^n = F \tag{4}$$

(a) En écrivant que $\left(1-x-x^2\right) F = 1$, montrer que la suite F_n vérifie la relation de récurrence

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2 \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$$

En déduire que $F_n \in \mathbb{N}$. En utilisant les résultats sur les suites récurrentes linéaires, montrer que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Montrer que le rayon de convergence de F est $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(b) Montrer en décomposant la fraction (4) que

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\alpha_1\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)} - \frac{1}{\alpha_2\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)}\right) \quad \text{où } \alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

(c) Vérifier que substituer x par $x(1+x)$ dans $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^p$ donne

$$F = \sum_{p \geq 0}\left(\sum_{i=0}^{p} \mathrm{C}_p^i x^i\right) x^p$$

En déduire[3] que

$$F_n = \sum_{\substack{j \text{ entier} \\ j \geq \frac{n}{2}}}^{n} \mathrm{C}_j^{n-j}$$

et donc $F_{2k} = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_{2k-i}^i$ et $F_{2k+1} = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_{2k+1-i}^i$. Visualiser ces relations dans le triangle de Pascal.

[3] C'est plus dur qu'il n'y parait...