Méthodes mathématiques pour la physique

fiche de TD n°7

1. On rappelle (cours) que si P_n désigne le polynôme de Legendre de degré n,

$$P_n(\cos\theta) = 2\left|C^n_{-\frac{1}{2}}\right|\cos n\theta + 2\left|C^{n-1}_{-\frac{1}{2}}C^1_{-\frac{1}{2}}\right|\cos(n-2)\theta + \cdots + \begin{cases} \left|C^p_{-\frac{1}{2}}\right|^2 & \text{si } n = 2p \\ 2\left|C^{p+1}_{-\frac{1}{2}}C^p_{-\frac{1}{2}}\right|\cos\theta & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

   (a) En dérivant terme à terme, montrer que

$$\begin{aligned} P_n'(\cos\theta) = {} & 2n\left|C^n_{-\frac{1}{2}}\right|Q_{n-1}(\cos\theta) + 2(n-2)\left|C^{n-1}_{-\frac{1}{2}}C^1_{-\frac{1}{2}}\right|Q_{n-3}(\cos\theta) + \cdots \\ & \cdots + \begin{cases} 4\left|C^{p+1}_{-\frac{1}{2}}C^{p-1}_{-\frac{1}{2}}\right|Q_1(\cos\theta) & \text{si } n = 2p \\ 2\left|C^{p+1}_{-\frac{1}{2}}C^p_{-\frac{1}{2}}\right|Q_0(\cos\theta) & \text{si } n = 2p+1 \end{cases} \end{aligned}$$

   où les Q_j désignent les polynômes de Chebyshev de 2^{nde} espèce de degré n :

$$Q_j(\cos\theta) = \frac{\sin((j+1)\theta)}{\sin\theta}$$

   (b) On rappelle que $|Q_j(x)| \leq j+1$ pour tout $x \in [-1,1]$. En déduire que

$$P_n'(x) \leq n^3 \text{ pour tout } x \in [-1,1]$$

   (c) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} P_n'(x)\,u^n$, u fixé tel que $|u| < 1$, est normalement convergente en x sur $[-1,1]$. En déduire que si

$$G(u,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}} = \sum_{n\geq 0} P_n(x)\,u^n$$

   est la fonction génératrice des P_n, on a

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \sum_{n\geq 0} P_n'(x)\,u^n$$

   pour $|x| \leq 1$ et $|u| < 1$.

   (d) Vérifier la formule

$$u\frac{\partial G}{\partial u} = (x-u)\frac{\partial G}{\partial x} \tag{1}$$

   (e) En substituant dans (1) G par les développements correspondants, en déduire la deuxième formule de récurrence des polynômes de Chebyshev.

2. Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$. On note Δ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP}{dx}\right] \\ &= \left(1-x^2\right)\frac{d^2P}{dx^2} - 2x\frac{dP}{dx} \end{aligned}$$

   (a) Montrer que Δ est bien un opérateur linéaire de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathcal{P}_n$.

(b) Ecrire la matrice de Δ dans la base canonique $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ de $\mathcal{P}_n$. En déduire que Δ a pour valeurs propres 0, -1×2, $-2 \times 3, \cdots$, $-n(n+1)$. En déduire que Δ est diagonalisable.

(c) On rappelle que les polynômes de Legendre vérifient :

$$\left(1 - x^2\right) \frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x \frac{dP_n}{dx} = -n(n+1) P_n$$

En déduire une base de vecteurs propres de Δ.

3. Montrer que le système $\{1, \cos nx, \sin nx, n \geq 1\}$ est orthogonal pour le produit scalaire défini sur l'espace des fonctions réelles 2π-périodiques continues par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ par

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx$$
$$\|f\|^2 = (f \mid f)$$

Calculer $\|1\|$, $\|\cos nx\|$ et $\|\sin nx\|$, $n \geq 1$. On rappelle que

$$\cos px \cos qx = \frac{1}{2} (\cos(p+q)x + \cos(p-q)x)$$
$$\sin px \sin qx = \frac{1}{2} (\cos(p-q)x - \cos(p+q)x)$$
$$\sin px \cos qx = \frac{1}{2} (\sin(p+q)x + \sin(p-q)x)$$

4. Soit $f(x) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n\geq 1} b_n \sin nx$, où (b_n) vérifie $\sum_{n\geq 1} |b_n| < \infty$.

(a) Le but de la question est de montrer que $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$

i. Montrer que f est une fonction continue.

ii. p étant fixé, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} b_n \sin nx \sin px$ est normalement convergente sur $[-\pi, \pi]$. En déduire qu'on peut calculer $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin px \, dx$ en intégrant terme à terme et ensuite le résultat cherché.

(b) Le but de cette seconde question est de montrer l'égalité de Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx = \sum_{n\geq 1} b_n^2$$

i. Montrer que

$$f^2(x) = \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{r+s=n} b_r b_s \sin rx \sin sx \right) \tag{2}$$

en utilisant le résultat sur les produits de séries absolument convergentes.

ii. Montrer que la série de fonctions (2) est normalement convergente, en déduire qu'on peut calculer $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx$ en intégrant terme à terme, et le résultat cherché.

5. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$. Montrer les trois propriétés suivantes :

(a) si f et g sont presque toujours égales sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx$.

(b) si f est presque toujours plus grande que g sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$.

(c) si f est presque toujours positive sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(x) \, dx = 0$ alors f est presque toujours nulle sur $[a, b]$.

6. On considère un fil de longueur π isolé sauf aux extrémités. On note $U(t, x)$ la température au temps t et au point x. On suppose $U(t, 0) = U(t, \pi) = 0$. La température $U(t, x)$ vérifie l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{3}$$

Soit $f(x) = U(0, x)$ la condition initiale. On développe f en série de sinus : $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \sin nx$ (voir le cours pour la justification de ce développement). On veut résoudre cette équation par la méthode de séparation des variables.

(a) En écrivant $U(t,x) = \alpha(t)\beta(x)$, montrer que α et β vérifient l'équation

$$\frac{1}{k}\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\beta}\frac{d^2\beta}{dx^2} \tag{4}$$

(b) En supposant *a priori* l'existence d'une constante λ, montrer qu'une condition suffisante pour que (4) soit satisfaite est que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{k}\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt} & = & -\lambda \\ \frac{1}{\beta}\frac{d^2\beta}{dx^2} & = & -\lambda \end{array}\right. \tag{5}$$

et résoudre (5) en fonction du paramètre λ.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute constante $A_n \in \mathbb{R}$,

$$U_n(t,x) \overset{\text{déf.}}{=} A_n e^{-n^2kt} \sin nx \tag{6}$$

est solution de l'équation (3) et satisfait les conditions au bord, de même que tout combinaison linéaire de fonctions de la forme (6).

(d) En déduire une solution satisfaisant les conditions initiales.

7. Soit $f(x)$ la fonction impaire 2π-périodique qui vaut $\frac{1}{2}(\pi - x)$ sur $]0,\pi]$.

(a) Calculer $f(0)$, tracer le graphe $y = f(x)$, vérifier que $f(x)$ vérifie les hypothèses de Dirichlet, calculer les coefficients de Fourier de f :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \qquad n \geq 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \qquad n \geq 1$$

(b) Calculer

$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n}$ pour $0 < x \leq \pi$ $\quad$ $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n}$ pour $\pi \leq x < 0$

$\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{2p+1}$ $\quad$ $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$

Pour la dernière formule, on appliquera l'identité de Parseval

$$2\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \tag{7}$$

8. Soit $f(x)$ la fonction paire 2π-périodique qui vaut $x(\pi - x)$ sur $[0,\pi]$.

(a) Tracer le graphe $y = f(x)$

(b) Calculer les coefficients de Fourier de f.

(c) Justifier que

$$\forall x \in [0,\pi] \quad x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{p\geq 1}\frac{\cos(2px)}{p^2}$$

et en déduire que

$$\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(d) En appliquant l'identité de Parseval (7), calculer $\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^4}$.

9. Soit $f(x)$ la fonction 2π-périodique qui vaut $x\left(\pi^2 - x^2\right)$ sur $[-\pi,\pi]$.

(a) Tracer le graphe $y = f(x)$

(b) Calculer les coefficients de Fourier de f.

(c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 12 \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3}$. En utilisant la valeur de $\sin n\frac{\pi}{2}$, montrer que

$$\sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

(d) En appliquant Parseval (7), calculer $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^6}$

10. Résoudre l'équation de la chaleur $\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ pour un fil de longueur π avec conditions aux bords nulles et condition initiale $U(0,x) = x(\pi - x)$ pour $x \in [0,\pi]$. Calculer $\lim_{t\to+\infty} U(t,x)$.

11. On considère un fil de longueur π totalement isolé (y-compris aux extrémités). La température $U(t,x)$ vérifie l'équation de la chaleur, et les conditions aux bords $\frac{\partial U}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial U}{\partial x}(t,\pi) = 0$. Soit $f(x) = U(0,x)$ la condition initiale. On développe f en série de cosinus : $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos nx$ (*i.e.* on prolonge f en une fonction paire sur $[-\pi,\pi]$ puis en une fonction 2π-périodique que l'on développe en série de Fourier).

(a) Vérifier qu'alors $U(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \mathrm{e}^{-n^2kt} \cos nx$ convient (mettre sur f une hypothèse raisonnable, par exemple primitive d'une fonction continue par morceaux sur $[0,\pi]$).

(b) On introduit la quantité totale de chaleur au temps t par $Q(t) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^\pi U(t,x)\,dx$.

i. Montrer que la quantité de chaleur reste constante et plus précisemment que $Q(t) = \frac{\pi}{2}a_0 = \int_0^\pi f(x)\,dx$.

ii. Retrouver le même résultat en calculant $\frac{dQ}{dt}$ par dérivation sous le signe $\int$.

iii. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\left|U(t,x) - \frac{a_0}{2}\right| \leq A\frac{\mathrm{e}^{-kt}}{1-\mathrm{e}^{-kt}}$. En déduire que $U(t,x) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx$.

12. **(Inégalité de Bessel)** Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux sur $[-\pi,\pi]$, $\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ sa série de Fourier.

(a) On note $\tilde{f}_N$ la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier.

i. Montrer que $u_N \overset{\text{déf.}}{=} f - \tilde{f}_N$ vérifie $u_N \perp \{\cos nx, \sin nx, \forall n \leq N\}$ (utiliser le fait que $(f \mid \cos nx) = \frac{a_n}{2}$ et $(f \mid \sin nx) = \frac{b_n}{2}$).

ii. Soit V l'espace des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux, V_0 l'espace des fonctions 2π-périodiques continues, $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions qui sont combinaisons linéaires de $\{1, \cos nx, \sin nx, \forall n \leq N\}$. Montrer que $\{1, \cos nx, \sin nx, \forall 1 \leq n \leq N\}$ est une base de $\mathcal{P}$. Montrer que $V_0 = \mathcal{P} + \mathcal{P}^\perp$.

(b) On considère la fonction $A : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^+$ définie par $A(g) = \|f - g\|^2$, $g \in \mathcal{P}$. On suppose que $f \notin \mathcal{P}$.

i. Montrer que $A(g) > 0$ pour tout $g \in \mathcal{P}$.

ii. En écrivant que $f = \tilde{f}_N + u_N$, et en appliquant le théorème de Pythagore, montrer que $A(g) \geq \|u_N\|^2$. Montrer que $A(g)$ a un minimum qui est atteint pour $g = \tilde{f}_N$ et trouver la valeur de ce minimum.

iii. Montrer que $A\left(\tilde{f}_N\right) = \left\|f - \tilde{f}_N\right\|^2 = \|f\|^2 - \left\|\tilde{f}_N\right\|^2$. Montrer que

$$\left\|\tilde{f}_N\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2\right)\right)$$

iv. En déduire l'inégalité de Bessel

$$2\|f\|^2 \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

(qui est en fait une égalité : c'est l'identité de Parseval).