Méthodes mathématiques pour la physique

fiche de TD n°6

1. Montrer que l'inverse de la série formelle $1 - x$ est $\sum_{n\geq 0} x^n$, que le rayon de convergence est 1, et que l'on a
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$$
pour $|x| < 1$. Que se passe t-il aux bornes de l'intervalle de convergence ?
2. Montrer que si $|x| < 1$
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$$
En déduire que
$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
pour $|x| < 1$. Montrer que la série converge pour $x = 1$ et en déduire que
$$\log 2 = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$$
ainsi qu'un encadrement de l'approximation de $\log 2$ par les séries partielles (penser au critère des séries alternées).
3. Montrer que si $|x| < 1$
$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$
En déduire que
$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{1}$$
Que se passe t-il pour $x = 1$? En déduire la formule
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$
Appliquer la formule (1) pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, estimer l'erreur de la méthode en utilisant le fait que la série vérifie le critère des séries alternées, et donc que l'on a une estimation du reste.
4. On rappelle que le coefficient binomial généralisé est défini par
$$\mathrm{C}_\alpha^n \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$
et on a $(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \mathrm{C}_\alpha^n x^n$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ de rayon de convergence $R = 1$.
   (a) On suppose que $\alpha = -p$, $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$C_{-p}^n = (-1)^n \mathrm{C}_{n+p-1}^{p-1} = (-1)^n \mathrm{C}_{n+p-1}^n$$
   En déduire que si $|x| < 1$,
$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n\geq 0} \mathrm{C}_{n+p-1}^{p-1} x^n$$

i. [1]Montrer que le nombre de partitions d'un entier n en p entiers est C_{n+p-1}^{p-1}.

ii. Montrer que C_{n+p-1}^{p-1} est aussi la dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré n en p variables.

iii. En écrivant $\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \frac{1}{(1-x)} \frac{1}{(1-x)^p}$, montrer que $1 + \mathrm{C}_p^{p-1} + \mathrm{C}_{p+1}^{p-1} + \cdots + \mathrm{C}_{p+n-1}^{p-1} = \mathrm{C}_{p+n}^{p}$ (interpréter cette formule dans le triangle de Pascal). En déduire que la dimension de l'espace des polynômes de degré $\leq n$ en p variables.

(b) On suppose que $\alpha = \frac{1}{2}$, montrer que

$$C_{\frac{1}{2}}^{n} = (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$$

et en déduire les développements en série entière de $\sqrt{1+x}$ et $\sqrt{1-x}$.

5. Trouver le développement en série entière de $\arcsin x$. Etudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.

6. **Intégrales de Wallis.**

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

(a) Montrer que la suite I_n est décroissante et positive, en déduire qu'elle a une limite.

(b) En intégrant par parties, montrer que $n\, I_n = (n-1)\; I_{n-2}$ dès que $n \geq 2$.

(c) En utilisant (b), montrer que

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} \tag{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)} \tag{3}$$

(d) Soit $v_n = n I_n I_{n-1}$; en utilisant (b), montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{\pi}{2}$.

(e) Multiplier les inégalités $I_n \leq I_{n-1}$ et $I_{n+1} \leq I_n$ par I_n pour en déduire que pour $n \geq 1$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\,(n+1)}} \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \tag{4}$$

(f) En déduire que $I_n \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

7. [2]Appliquer les résultats des exercices 4 et 6 pour étudier le développement en série entière de $\sqrt{1-x}$ en $x = \pm 1$ (on utilisera l'équivalent de I_{2n} pour prouver l'absolue convergence). En déduire les formules

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} = \frac{1}{2} \text{ et } \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$

8. Montrer que si $|t| < 1$, on a $\sum_{n\geq 0} t^n \mathrm{e}^{in\theta} = \frac{1}{1-t\mathrm{e}^{i\theta}}$. En déduire que

$$\sum_{n\geq 0} t^n \cos n\theta = \frac{1 - t\cos\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2} \text{ et } \sum_{n\geq 0} t^n \sin n\theta = \frac{t\sin\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2}$$

Soient P_n et Q_n les polynômes de Tchebychev de première et deuxième espèce ($P_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ et $Q_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ resp.), montrer que si $|t| < 1$ et $|x| \leq 1$, on a

$$\sum_{n\geq 0} P_n(x)\, t^n = \frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2} \text{ et } \sum_{n\geq 0} Q_n(x)\, t^n = \frac{1}{1 - 2tx + t^2}$$

[1]Cette question et les deux suivantes sont un peu difficiles.
[2]Cette question est réservée aux étudiants qui ont vu l'absolue convergence.

9. Soit k tel que $|k| < 1$ et
$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$
   (a) Montrer que (avec les notations de l'exercice 6 (2))
$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 0} I_{2n}\, k^{2n} \, \sin^{2n} t$$
   (b) Montrer (par exemple en utilisant (4)) que
$$\left| \frac{2}{\pi} I_{2n}\, k^{2n} \, \sin^{2n} t \right| \leq k^{2n}$$
   On peut donc intégrer terme à terme par rapport à t.

   (c) Montrer que
$$K(k) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 0} (I_{2n})^2 \, k^{2n} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} \right)^2 k^{2n} \right)$$
   (d) Montrer que $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} \right)^2 k^{2n} \leq \frac{k^2}{1-k^2}$ et en déduire une majoration de l'erreur commise en approximant K par $\frac{\pi}{2}$. Que peut-on en déduire quant à l'approximation de la période du pendule par $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ dans le cas des petites oscillations ?

   (e) En utilisant $I_n^2 \geq \frac{\pi}{2(n+1)}$, montrer que $I_{2n}^2 \geq \frac{\pi}{4(n+1)}$ et en déduire que
$$K(k) \geq \frac{1}{2k^2} \sum_{n \geq 0} \frac{\left(k^2\right)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2k^2} \log \left(\frac{1}{1-k^2} \right)$$
   puis que $K(k) \overset{k \to \pm 1}{\longrightarrow} +\infty$.

   (f) Montrer que
$$K(k) \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{1-k^2} \right)$$
   (utiliser $I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$)

10. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \mathrm{e}^{-nx}$ converge sur $]0, +\infty[$ et trouver sa somme. Montrer qu'il y a convergence normale sur tout intervalle $[x_0, +\infty[$, $x_0 > 0$, mais qu'il n'y a pas convergence normale sur $]0, +\infty[$.

11. **Suite de Fibonacci.** On considère la série formelle définie par le développement au voisinage de 0 de la fonction suivante
$$\frac{1}{1 - x - x^2} \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{n \geq 0} F_n x^n = F \tag{5}$$
   (a) En écrivant que $\left(1 - x - x^2\right) F = 1$, montrer que la suite F_n vérifie la relation de récurrence
$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \, n \geq 2 \\ F_0 = F_1 = 1 \end{cases}$$
   En déduire que $F_n \in \mathbb{N}$. En utilisant les résultats sur les suites récurrentes linéaires, montrer que
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$
   Montrer que le rayon de convergence de F est $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(b) Montrer en décomposant la fraction (5) que

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\alpha_1 \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)} - \frac{1}{\alpha_2 \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)} \right) \text{ où } \alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

(c) Vérifier que substituer x par $x\,(1+x)$ dans $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^p$ donne

$$F = \sum_{p\geq 0} \left(\sum_{i=0}^{p} \mathrm{C}_p^i x^i \right) x^p$$

En déduire[3] que

$$F_n = \sum_{\substack{j \text{ entier} \\ j \geq \frac{n}{2}}}^{n} \mathrm{C}_j^{n-j}$$

et donc $F_{2k} = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_{2k-i}^i$ et $F_{2k+1} = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_{2k+1-i}^i$. Visualiser ces relations dans le triangle de Pascal.

12. Montrer que

$$2^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6.\ldots(2n)} = \frac{1}{2^n} C_{2n}^n$$

13. On note $T_n\,(x)$ le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Chebyshev de $1^{\text{ère}}$ espèce, $T_n\,(x)$ est donc de degré n.

(a) Montrer que $T_n\,(x) = \sum_{2p\leq n} C_n^{2p} x^{n-2p} \left(x^2-1\right)^p$.

(b) On définit la suite Q_n des polynômes de Chebyshev de $2^{\text{ième}}$ espèce par la même relation de récurrence que T_n et $Q_0\,(x) = 1$, $Q_1\,(x) = 2\,x$.

i. Montrer que Q_n est de degré n, que $Q_n = 2^n x^n + (\cdots d^\circ < n)$, et que Q_n à même parité que n.

ii. Montrer que $Q_n\,(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ et étudier les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

iii. Montrer que $Q_n\,(x) = \sum_{2p\leq n} C_{n+1}^{2p+1} x^{n-2p} \left(x^2-1\right)^p$, en déduire $Q_n\,(1)$ et $Q_n\,(-1)$.

iv. Soit Δ_n le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2\,x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\,x & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2\,x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\,x \end{vmatrix}$$

avec $\Delta_0 \overset{\text{déf.}}{=} 1$ et $\Delta_1 \overset{\text{déf.}}{=} 2\,x$. Montrer que $\Delta_n = Q_n\,(x)$.

(c) Calculer T_2 à T_4, Q_2 à Q_4. Vérifier que $Q_4\,(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$.

(d) Montrer que T_n a n racines distinctes : $\cos\alpha_0, \cos\alpha_1, \ldots \cos\alpha_{n-1}$ avec $\alpha_p = \frac{2p+1}{2n}\pi$ et que Q_n a n racines distinctes : $\cos\theta_1, \cos\theta_2, \ldots \cos\theta_n$ avec $\theta_p = \frac{p}{n+1}\pi$.

(e) Montrer que $|T_n\,(x)| \leq 1$ si $x \in [-1, 1]$. Montrer que $Q_n\,(x) = xQ_{n-1}\,(x) + T_n\,(x)$. Utiliser (b)ii, en déduire que $|Q_n\,(x)| \leq n+1$ si $x \in [-1, 1]$.

(f) Montrer que $T_n\,(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch} nt$ et $Q_n\,(\operatorname{ch} t) = \frac{\operatorname{sh}(n+1)t}{\operatorname{sh} t}$.

(g) On note $\tilde{\Delta}_n$ le déterminant défini comme Δ_n sauf le coefficient en position (n, n) qui vaut x. On pose $\tilde{\Delta}_0 \overset{\text{déf.}}{=} 1$ et $\tilde{\Delta}_1 \overset{\text{déf.}}{=} x$. Montrer que $\tilde{\Delta}_n = T_n\,(x)$.

(h) En utilisant (g), montrer que T_n est croissant sur $[1, +\infty[$. Montrer que si $x \geq 1$,

$$T_n\,(x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n \right]$$

(à partir de (f) par exemple) et retrouver la formule de (a). Faire le même genre de calcul avec Q_n.

---

[3] C'est plus dur qu'il n'y parait...