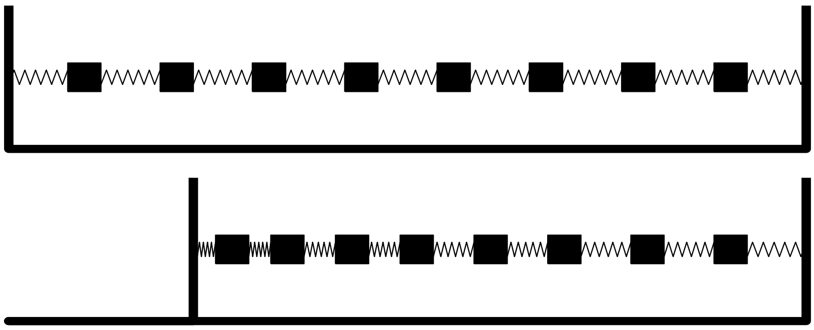
# Méthodes mathématiques pour la physique

## fiche de TD n°5

On considère un système d'oscillateurs harmoniques constitué de $n$ masses identiques $m$ couplées par des ressorts de raideur $k$. Le déplacement de chaque masse est soumis à des forces de frottement de coefficient $k'$. La premier ressort à gauche est fixé à une paroi mobile se déplaçant horizontalement suivant la fonction $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$, $a_0 > 0$. Dans cet exercice, on va s'intéresser au comportement de la masse la plus à droite du système.



1. **Mise en équation.**

   (a) Montrer que le système à résoudre s'écrit

   $$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 M_0 x = \omega_0^2 a(t)\, e_1 \tag{1}$$

   où $b = \frac{k'}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et

   $$M_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

   (b) Montrer que si on connaît une solution particulière $x_0(t)$, la solution $x(t)$ de (1) s'écrit $x(t) = x_0(t) + u(t)$ où $u(t)$ est la solution dy système homogène associé $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 M_0 x = 0$.

(c) En déduire que si $b > 0$ alors le comportement du système en régime permanent vérifie $x \simeq x_0$.

2. **On suppose que les frottements sont négligeables ($b = 0$)** et on va chercher une solution particulière de (1). Comme indiqué dans l'introduction, on va surtout s'intéresser à la dernière composante de $x_0(t)$, donc à $a_n$ qui représente l'amplitude de l'oscillation de la dernière masse.

   (a) On cherche une solution particulière de la forme

$$x_0(t) = \cos(\omega t) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

   où les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes à déterminer. Montrer qu'ils doivent vérifier

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (2-\rho)\, a_1 - a_2 & = & a_0 \\ -a_1 + (2-\rho)\, a_2 - a_3 & = & 0 \\ & \vdots & \\ -a_{n-1} + (2-\rho)\, a_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

   où $\rho = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$.

   (b) Montrer que la résolution du système précédent se ramène à trouver une suite récurrente $(a_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ telle que

$$a_j = (2-\rho)\, a_{j-1} - a_{j-2},\ j = 2, \ldots, n+1 \tag{5a}$$

$$a_{n+1} = 0,\ a_0 \text{ donné} \tag{5b}$$

   (c) Déterminer l'équation caractéristique associée à (5) :

      i. Calculer son discriminant $\Delta$.

      ii. Discutter du signe de $\Delta$ suivant les valeurs de $\omega$ par rapport à $\omega_0$.

      iii. Montrer que le produit des racines est 1 et que la somme des racines est $2 - \rho$.

3. Cas $\omega > 2\omega_0$ ($\Delta > 0$)

   (a) Montrer que l'équation caractéristique associée à (5a) possède deux racines reelles négatives et inverses l'une de l'autre (cf question 2(c)iii). En déduire que l'une d'elle, notée $\alpha$, vérifie

$$-1 < \alpha < 0 \tag{6}$$

   (b) En utilisant (5b), montrer que

$$a_j = \frac{a_0}{1 - \alpha^{2(n+1)}} \left( \alpha^j - \alpha^{2(n+1)-j} \right) \tag{7}$$

   (c) En déduire que

$$a_n = a_0 \alpha^n \frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha^{2(n+1)}} \tag{8}$$

(d) Déduire de (6) que $\alpha^{2n} < 1$ donc $0 < 1-\alpha^2 < 1-\alpha^{2(n+1)}$ puis que

$$|a_n| \leq a_0 \, |\alpha|^n \tag{9}$$

et donc $a_n$ tend vers zéro quand $n$ tend vers l'infini.

4. Cas $\omega < 2\omega_0$ ($\Delta < 0$)

(a) Montrer que l'équation caractéristique associée à (5a) possède deux racines complexes conjuguées $\gamma e^{i\theta}$ et $\gamma e^{-i\theta}$. Déduire de la question 2(c)iii que $\gamma = 1$ et $\theta = \arccos\left(\frac{2-\rho}{2}\right)$.

(b) On rappelle que la solution générale d'une récurrence d'ordre 2 dont l'équation caractéristique possède un discriminant négatif (on notera $\gamma e^{i\theta}$ et $\gamma e^{-i\theta}$ ses deux racines, $\gamma > 0$, $\theta \in ]0, \pi[$) s'écrit sous l'une des formes équivalents suivantes

$$\begin{aligned} a_j &= C_1 \left(\gamma e^{i\theta}\right)^j + C_2 \left(\gamma e^{-i\theta}\right)^j && \text{(10a)} \\ &= \gamma^j \left(K_1 \cos j\theta + K_2 \sin j\theta\right) && \text{(10b)} \\ &= A\gamma^j \cos\left(j\theta - \varphi\right) && \text{(10c)} \end{aligned}$$

On utilisera plutôt la forme (10c) pour exprimer la solution de (5). Montrer que

$$A = \frac{a_0}{\sin\left(n+1\right)\theta} \tag{11}$$

$$\varphi = \left(n+1\right)\theta - \frac{\pi}{2} \tag{12}$$

(on supposera ici que $(n+1)\,\theta$ n'est pas de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)

(c) En déduire que

$$a_n = a_0 \frac{\sin\theta}{\sin\left(n+1\right)\theta} \tag{13}$$

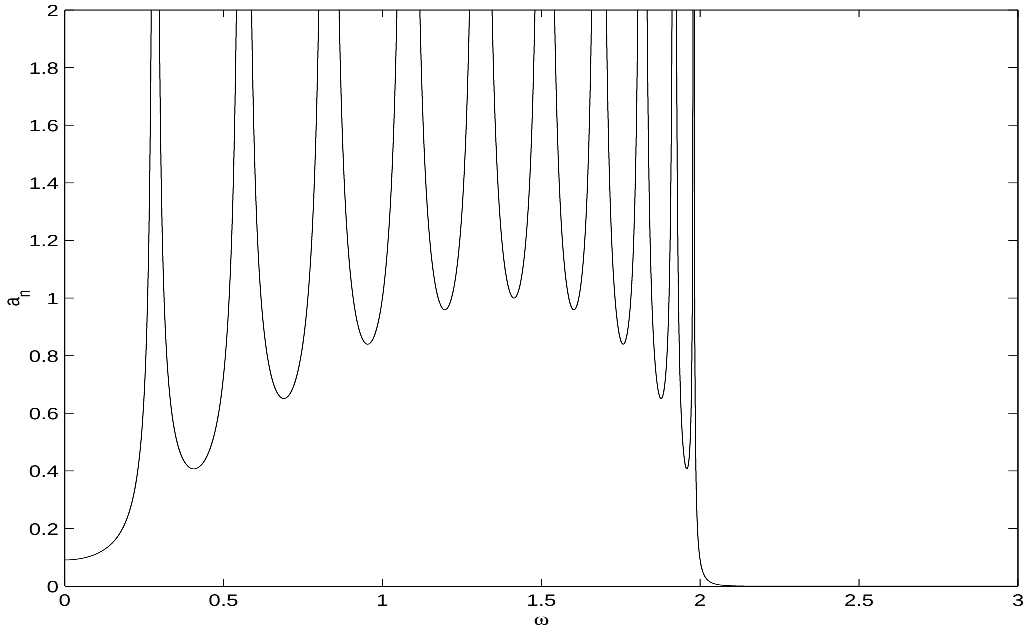
(d) Montrer que

$$|a_n| \geq \frac{a_0}{2}\sqrt{\rho\left(4-\rho\right)} \tag{14}$$

5. Cas $\omega = 2\omega_0$ ($\Delta = 0$). Montrer que

$$a_n = \left(-1\right)^n \frac{a_0}{n+1} \tag{15}$$

Sur la figure ci-dessous, on a représenté $a_n$ en fonction de $\omega$, en utilisant les formules (13), (15) et (8). On peut aussi deviner la fonction (14), $\omega \longrightarrow \frac{a_0\omega}{2\omega_0^2}\sqrt{4\omega_0^2 - \omega^2}$, minorant $a_n$ lorsque $\omega < 2\omega_0$




Filtre d'ordre $n = 10$, fréquence de coupure $\omega_c = 2$.

**Conclusion.** Le système se comporte comme un filtre qui supprime les fréquences supérieures à $2\omega_0$. La fréquence $\omega_c = 2\omega_0$ s'appelle *fréquence de coupure* du filtre. Ce type de système se rencontre souvent en physique et en électronique : on l'appelle un *filtre passe-bas* (il ne laisse passer que les basses fréquences).[1]

[1]Quelques simulations sur http ://www.u-bourgogne.fr/monge/e.busvelle/oscillateur_harmonique.php