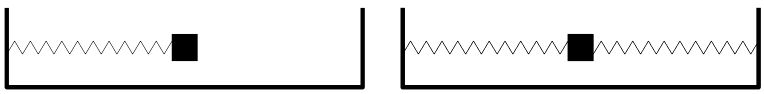
Méthodes mathématiques pour la physique

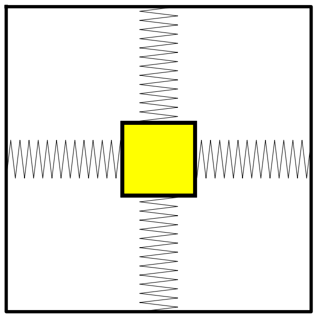
fiche de TD n°4

1. On considère les deux systèmes suivant :
   – L'oscillateur harmonique à une seule masse m, avec un coefficient de frottement k' et un ressort de raideur k.
   – Un oscillateur à une seule masse m et un coefficient de frottement k' identiques à la situation précédente mais avec deux ressorts de raideur $\frac{k}{2}$.



   Montrer que ces deux systèmes sont, du point de vue mathématique, équivalents.

2. On considère le système décrit sur la figure çi-dessous :



   et on suppose en première approximation que les ressorts horizontaux n'exercent que des forces horizontales alors que les ressorts verticaux n'exercent que des forces verticales. Les quatre ressorts sont identiques de raideur k, et on note k' le coeffficient de frottement.

   (a) Montrer que ce système vérifie les équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} m\ddot{x} + k'\dot{x} + 2kx & = & 0 \\ m\ddot{y} + k'\dot{y} + 2ky & = & 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

   (b) Résoudre (1), plus particulèrement :

      i. Dans le cas où $k' = 0$,

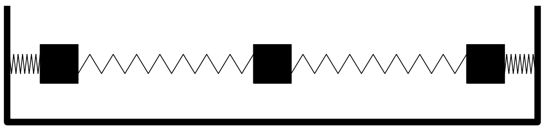
         A. Exprimer les solutions linéairement en fonction des conditions initiales.$x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\dot{x}(0) = v_x$, $\dot{y}(0) = v_y$.

         B. Montrer que si $x_0 v_y \neq y_0 v_x$ alors les trajectoires du systèmes sont des ellipses. Représenter graphiquement le cas où $v_x = y_0 = 0$, $x_0 v_y \neq 0$.

C. Quel est la nature des solutions si $x_0 v_y = y_0 v_x$?

ii. Montrer que si $k' > 0$ alors les trajectoires tendent vers la position d'équilibre. Représenter graphiquement les trajectoires solutions (courbes planes $(x(t), y(t))$ paramétrées en t), suivant que $k' < 2\sqrt{2km}$ où non.

3. On considère l'oscillateur harmonique à trois masses M_1, M_2 et M_3 identiques valant m couplées avec quatre ressorts de même raideur k. On supposera les frottements faibles ($k' < \sqrt{km}$)



Oscillateur harmonique couplé

(a) Donner l'expression de la solution en remarquant que le système peut-être découplé en faisant un changement de base orthogonal (passage aux coordonnées modales).

(b) Quel est le comportement asymptotique du système ?

(c) On suppose maintenant qu'il n'y a pas de frottements.

i. Quel est le comportement du système si initialement, les vitesses des masses sont nulles, la masse M_2 est centrée et les masses M_1 et M_3 sont écartées de la même longueur (figure 3) ?

ii. Montrer que l'énergie du système

$$\begin{aligned} E(t) &= E_c(t) + E_p(t) \\ &= \frac{1}{2} m \|\dot{x}\|^2 + \frac{k}{2}(Mx, x) \end{aligned}$$

où M représente la matrice tridiagonale habituelle, est préservée au cours du temps.

iii. Montrer que $E(t)$ s'exprime très simplement dans les coordonnées modales.

iv. Calculer E en fonction de k, des valeurs propres de M et des amplitudes dans les coordonnées modales.

4. On s'intéresse à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(a) On considère la récurrence linéaire d'ordre 2 avec les conditions aux bords suivante

$$\begin{cases} -u_{j+1} + (2-\lambda) u_j - u_{j-1} = 0, \; j = 1, \ldots, n \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

où on suppose que $\lambda \in]0, 4[$ et on pose $\frac{2-\lambda}{2} = \cos\theta$. Résoudre (3). Montrer que si $(n+1)\theta$ est de la forme $k\pi$, $k = 1, \ldots, n$ alors il existe une solution de la forme $u_j = \sin j\theta$.

(b) En déduire les valeurs propres et vecteurs propres de (2).

(c) Soit $u = (\sin\theta, \sin 2\theta, \ldots, \sin n\theta)$ où $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$ (on omet de préciser que θ dépend de k).

i. Montrer que $\|u\|^2 = \frac{1}{2}(n - \cos 2\theta - \cos 4\theta - \cdots - \cos 2n\theta)$.

ii. Montrer que

$$e^{2i\theta} + e^{4i\theta} + \cdots + e^{2in\theta} = -1 = \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cdots + \cos 2n\theta$$

iii. En déduire que $\|u\|^2 = \frac{n+1}{2}$.

(d) Décrire les solutions de l'oscillateur harmonique couplé à 5 masses. En particulier, décrire les modes correspondant à 1 masse fixe, 2 masses fixes (calculer les valeurs propres et la matrice de passage orthogonale explicitement).