Méthodes mathématiques pour la physique

fiche de TD n°3

UNIVERSITE DE BOURGOGNE

1. Donner le type et résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\dot{x} = 1 - x \tag{1}$$
$$\ddot{x} - x = 0 \tag{2}$$
$$\ddot{x} + 9\,x = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 3 \tag{3}$$
$$\ddot{x} + \dot{x} - 2\,x = 0 \tag{4}$$
$$\ddot{x} + \frac{1}{t}\,\dot{x} - \frac{1}{t^2}\,x = 0 \text{ (essayer } x(t) = \frac{1}{t}) \tag{5}$$
$$\ddot{x} + 2\,\dot{x} + 5\,x = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1 \tag{6}$$
$$\ddot{x} - \frac{\dot{x}}{t} = t \tag{7}$$
$$\ddot{x} - 4\,x = t + 3\,\mathrm{e}^t \tag{8}$$
$$\frac{d^4x}{dt^4} - x = t^3 + 1 \tag{9}$$
$$\ddot{x} + 2\,\dot{x} + 5\,x = 2\cos t \tag{10}$$

2. **Croissance limitée d'une population.** L'équation est $\dot{N} = k\,N - l\,N^2$, $k, l > 0$. Résoudre cette équation avec $N(0) = N_0$ et montrer que $N(t)$ tend vers une limite N_∞ (à déterminer) quand $t \longrightarrow +\infty$. Montrer que $N(t)$ admet un point d'inflexion t_i (qui peut-être négatif). Montrer que l'on peut déduire N_∞de $N(t_i)$.
3. **Croissance "illimitée" d'une population.** Supposons que la proportion de carbone radioactif d'un arbre en vie soit P_0. Sachant que la demi-vie du carbone radioactif est à peu près 5600 ans, donner une estimation de l'âge d'un fossile en bois dont la proportion de carbone radioactif est $2^{-5}P_0$.
4. On considère l'équation linéaire du deuxième ordre $a\,\ddot{x} + b\,\dot{x} + c\,x = f(t)$ avec a, b et c constantes et $f(t)$ un polynôme de degré n.
   (a) Montrer que si $c \neq 0$, il existe une solution qui est un polynôme de degré n. Résoudre $\ddot{x} - 3\,\dot{x} + 2\,x = 3\,t^2 - t + 1$.
   (b) Et si $c = 0$ et $b \neq 0$? Résoudre $\ddot{x} - 3\,\dot{x} = 3\,t^2 - t + 1$.
5. On considère l'équation linéaire du deuxième ordre $a\,\ddot{x} + b\,\dot{x} + c\,x = f(t)$ avec a, b et c constantes et $f(t) = p(t)\,\mathrm{e}^{mt}$ où $m \in \mathbb{C}$ et $p(t)$ est un polynôme. Montrer qu'il existe une solution $x_0(t) = q(t)\,\mathrm{e}^{mt}$ avec $q(t)$ polynôme. Résoudre $\ddot{x} - 3\,\dot{x} + 2\,x = t\,\mathrm{e}^t$.
6. **Oscillateur libre amorti.** On considère la solution $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-bt}\cos(\omega_0 t - \varphi)$, $A, b, \omega_0 > 0$ telle que $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.
   (a) Montrer que $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, que $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{\omega_0}\right)$ et que $A = x_0\sqrt{1 + \frac{b^2}{\omega_0^2}} > x_0$.

(b) Trouver les valeurs de $t \geq 0$ telles que $x(t) = 0$.

(c) Trouver les valeurs de t≥ 0 telles que $\dot{x}(t) = 0$. Pour un tel t, comparer $|x(t)|$ et $x_0 \mathrm{e}^{-bt}$.

(d) Tracer les courbes $x(t)$, $A\,\mathrm{e}^{-bt}$ et $x_0\,\mathrm{e}^{-bt}$ dans le cas $b \ll \omega_0$.

7. **Oscillateur libre sans frottements.** Calculer l'énergie de la solution $x(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$, $\omega_0 = \frac{k}{m}$ de l'oscillateur harmonique conservatif.

8. **Réglage d'un amortisseur.** Le coefficient de frottement est fixe (b fixé), mais on fait varier la dureté (ω_0) de l'amortisseur, et on veut comparer les courbes d'amortissement que l'on notera $x_1(t)$ si $\omega_0 < b$, $x_2(t)$ si $\omega_0 = b$ et $x_3(t)$ si $\omega_0 > b$ et dans tous les cas $x_i(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}_i(0) = 0$. Montrer que

$$x_1(t) = x_0 \mathrm{e}^{-bt}\left(\mathrm{ch}(c\,t) + \frac{b}{c}\,\mathrm{sh}(c\,t)\right) \text{ où } c = \sqrt{b^2 - \omega_0^2} \tag{11}$$

$$x_2(t) = x_0 \mathrm{e}^{-bt}(1 + b\,t) \tag{12}$$

$$x_3(t) = x_0 \mathrm{e}^{-bt}\left(\cos(\omega t) + \frac{b}{\omega}\sin(\omega t)\right) \text{ où } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \tag{13}$$

En déduire que $x_1(t) \geq x_2(t) \geq |x_3(t)|\ \forall t \geq 0$. Faire un dessin visualisant la situation. Sachant que l'amortisseur doit revenir au repos le plus rapidement possible sans que les passagers ne soient secoués, quel est le réglage optimum ?

9. **L'oscillateur entretenu.** L'équation de l'oscillateur entretenu est

$$m\,\ddot{x} + k'\,\dot{x} + kx = f(t) \tag{14}$$

où $f(t)$ est la force d'entretien. Monter que dans le cas où il y a des frottements ($k' > 0$), on a $u(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ où $u(t)$ est la solution de l'équation homogène associée. En déduire que pour t grand, $x(t) \sim x_0(t)$ où $x_0(t)$ est une solution particulière de (14) (*i.e.* le régime permanent est la solution particulière et le système "oublie" ses conditions initiales).

10. **Réalisation mécanique de l'oscillateur entretenu.** Soit $a(t) = a_0\cos(\omega t - \varphi)$, $\omega > 0$. L'équation est

$$\ddot{x} + 2\,b\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = A_0\cos(\omega t - \varphi) \tag{15}$$

avec $b = \frac{k'}{2m} > 0$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$, $\omega \neq \omega_0$ et $A_0 = a_0\omega_0^2$. Montrer qu'il existe une solution particulière $x_0(t) = A\cos(\omega t - \varphi - \psi)$. Calculer l'amplitude de sortie A et le déphasage ψ en fonction de A_0, ω, b et ω_0. Étudier qualitativement A en fonction de ω. Interpréter les résultats lorsque l'équation (15) modélise un amortisseur de voiture roulant à vitesse constante sur une piste à profil sinusoïdal.

11. **Pour ceux qui veulent aller plus loin :** Soit une équation linéaire homogène du second ordre à coefficients dépendant du temps dont on connaît une solution particulière $x_1(t)$, *i.e.*

$$a_2(t)\,\ddot{x}_1 + a_1(t)\,\dot{x}_1 + a_0(t)\,x_1 = 0 \tag{16}$$

On cherche une autre solution particulière $x_2(t)$ indépendante de $x_1(t)$ donc vérifiant aussi

$$a_2(t)\,\ddot{x}_2 + a_1(t)\,\dot{x}_2 + a_0(t)\,x_2 = 0 \tag{17}$$

(a) Quitte à multiplier (16) par x_2 et (17) par x_1 puis à soustraire les deux équations, montrer que le Wronskien de x_1 et x_2 satisfait l'équation du premier ordre séparable

$$a_2\dot{W} + a_1 W = 0 \tag{18}$$

(b) On considère à nouveau l'équation (5) et on suppose que l'on a trouvé que la solution $x_1(t) = t$ (on n'utilise donc pas l'indication).

i. Résoudre (18).

ii. En utilisant le fait que $\frac{d}{dt}\frac{x_2}{x_1} = -\frac{W}{x_1^2}$, trouver $\frac{x_2}{x_1}$ puis x_2.

(c) Par la même méthode, résoudre

$$\left(1 - t^2\right)\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2x = 0 \tag{19}$$