Méthodes mathématiques pour la physique

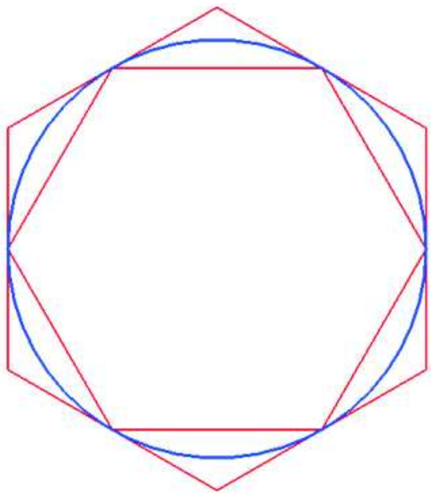
fiche de TD n°2

UNIVERSITE DE BOURGOGNE

1. Calculer la longueur parcourue par deux mobiles sur les arcs de courbe

$$X_1(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$$
$$X_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t), t \in [0, 2\pi]$$

   Quelles sont les courbes ?
2. Trouver la longueur de l'arc de parabole $y = \frac{x^2}{2}$ pour $0 \leq x \leq 1$.
3. Trouver un encadrement de $\ln(2)$ par deux sommes de Riemann convergentes vers la même limite. Calculer la largeur de l'encadrement obtenu. Trouver une somme de Riemann qui converge vers $\ln(2)$ plus rapidement que les précédentes (sans justifier).
4. Décrire mathématiquement l'encadrement de 2π obtenu en approchant le périmètre du cercle par des lignes polygonales. Déterminer l'ordre de la convergence.



5. **La tractrice.** Le long d'un canal, un cheval tire à vitesse constante un bateau sans gouvernail en suivant le chemin de halage supposé rectiligne. La corde est de longueur a et à l'origine, elle est supposée tendue et perpendiculaire à la berge. Le cheval est donc supposé partir du point $(0,0)$ et parcourir l'axe $0y$ alors que le bateau est initialement en position $(a,0)$.
   (a) Déterminer la courbe suivie par le bateau (en fonction de x), étudier son comportement.
   (b) Comparer la distance parcourue par le cheval et celle parcourue par le bateau (en particulier asymptotiquement).
6. **Courbe du chien.** Un homme se déplace le long de Oy en partant de O vers $y > 0$ avec une vitesse constante v_h. Son chien est initialement placé au point $(x_0, 0)$, $x_0 > 0$. On note (x, y) la position du chien et on s'intéresse à la courbe $(x(t), y(t))$ que l'on peut paramétrer en x, ce qui revient à chercher la courbe $y(x)$ (voyez vous pourquoi ?). On supposera que $v_c > v_h$ (et là ?). On notera y' la dérivée de y par rapport à x et $\dot{y}$ la dérivée de y par rapport à t, suivant que l'on considère y comme une fonction de x où de t.

(a) Le chien cherche à rejoindre son maître en se dirigeant à tout moment vers lui et en courant à vitesse constante v_c. Montrer les deux égalités suivantes

$$y' = -\frac{v_h t - y}{x} \tag{1}$$

$$\dot{x} = \frac{-v_c}{\sqrt{1+y'^2}} \tag{2}$$

(on rappelle que $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}y'$)

(b) En dérivant (1)$\Leftrightarrow xy' = y - v_h t$ par rapport à t, montrer que (1) et (2) permettent d'obtenir l'équation differentielle

$$\frac{xy''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{v_h}{v_c} \tag{3}$$

(utiliser $\frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dt}$)

(c) On pose $y'(x) = \mathrm{sh}\,(u(x))$ dans (3). En déduire que

$$y'(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{v_h}{v_c}\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right)$$

(d) En déduire $y(x)$ par intégration

i. En quel point et au bout de combien de temps le chien rejoint-il son maître ?

ii. Quelle devrait être la trajectoire du chien pour rejoindre son maître le plus vite possible et quel est le temps minimal correspondant ?

iii. Calculer le rapport entre le temps minimal et le temps mis par le chien (A.N. Si $v_h = 4\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$ et $v_c = 5\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$, vous devez trouver un gain de temps de 40%).

7. Étudier l'équation $x' = 2\sqrt{x}$. Existe-t-il des solutions triviales ? Séparer et résoudre. Trouver une solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant $x(0) = 0$ différente de la solution triviale. Recoller.

8. Résoudre $x'\left(1-t^2\right)^2 + 4\,t\,x^2 = 0$. Trouver la solution qui en $t = 0$ vaut x_0 donné. Vérifier que les solutions vérifient toutes $x(\pm 1) = 0$ (le problème des conditions initiales n'est pas soluble en $t = \pm 1$).

9. Résoudre l'équation du mouvement dans le cas de l'oscillateur harmonique considéré comme un système conservatif.

10. Résoudre l'équation de la chute d'un corps avec résistance de l'air

$$m\,\ddot{x} = m\,g - k\,\dot{x}$$

On pose $v = \dot{x}$ et on a $m\,\dot{v} = -k\,v + m\,g$. Calculer $v(t)$ quand $v(0) = 0$. Montrer que $v(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} v_\infty$. Montrer que $v(t)$ est croissante et $v(t) \leq v_\infty$.

11. Montrer que l'on peut obtenir une équation linéaire à partir de l'équation de Bernoulli $a(t)\;x' + b(t)\;x + c(t)\;x^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

12. On considère l'équation de Ricatti $a(t)\;x' + b(t)\;x + c(t)\;x^2 = f(t)$ avec $f(t)$ donnée. Montrer que si on connaît une solution particulière $x_0(t)$, on peut obtenir une solution $x(t) = u(t) + x_0(t)$ avec $u(t)$ qui vérifie une équation de Bernoulli.

13. Le freinage d'un parachute est proportionnel au carré de la vitesse. Écrire l'équation en $v = \dot{x}$, trouver une solution triviale de l'équation de Ricatti, en déduire une méthode de résolution. Même questions que dans l'exercice 10